

1. Πυθέας ο Μασσαλιώτης

Ποιος είναι;

Ο Πυθέας ο Μασσαλιώτης ήταν ένας από τους σημαντικότερους Έλληνες εξερευνητές, γεωγράφους και αστρονόμους της αρχαιότητας. Έζησε περίπου τον 4ο αιώνα π.Χ. και καταγόταν από τη σημερινή Μασσαλία. Η αλήθεια είναι ότι γνωρίζουμε πολύ λιγότερα για την προσωπική ζωή του Πυθέα απ' όσα γνωρίζουμε για το ταξίδι του. Κανένα αρχαίο κείμενο δεν διασώζει λεπτομέρειες για την οικογένεια, τα παιδικά του χρόνια ή τον θάνατό του. Ωστόσο, από τα έργα και τις αναφορές άλλων συγγραφέων μπορούμε να σχηματίσουμε μια αρκετά καλή εικόνα.

Η καταγωγή και η μόρφωσή του

Ο Πυθέας γεννήθηκε στη Μασσαλία, μια πλούσια ελληνική αποικία που είχε ιδρυθεί από Φωκαείς Έλληνες της Μικράς Ασίας. Η πόλη ήταν σημαντικό εμπορικό κέντρο και διατηρούσε σχέσεις με πολλούς λαούς της δυτικής Ευρώπης.

Οι γνώσεις του στην αστρονομία, στα μαθηματικά και στη γεωγραφία δείχνουν ότι είχε λάβει εξαιρετική εκπαίδευση. Δεν ήταν ένας απλός ναυτικός ή έμπορος· ήταν επιστήμονας με τα δεδομένα της εποχής του.

Το τέλος της ζωής του

Δεν γνωρίζουμε:

- πότε ακριβώς πέθανε,
- πού πέθανε,
- αν πραγματοποίησε και άλλα ταξίδια μετά την επιστροφή του.

Οι ιστορικοί τοποθετούν συνήθως τον θάνατό του στα τέλη του 4ου ή στις αρχές του 3ου αιώνα π.Χ.

Το μεγάλο του ταξίδι

Γύρω στο 325 π.Χ. πραγματοποίησε ένα εξαιρετικά τολμηρό ταξίδι στον Ατλαντικό Ωκεανό. Πέρασε τις Ηράκλειες Στήλες (το σημερινό Στενό του Γιβραλτάρ) και ταξίδεψε κατά μήκος των ακτών της δυτικής Ευρώπης.

Επισκέφθηκε περιοχές που αντιστοιχούν σήμερα στις:

- Ισπανία
- Γαλλία
- Βρετανία

Πιθανότατα έφτασε μέχρι τη μυστηριώδη «Θούλη» (Θούλη ή Θούλε), μια χώρα που περιέγραψε ως βόρεια από τη Βρετανία, όπου το καλοκαίρι η νύχτα διαρκούσε ελάχιστα και η θάλασσα παρουσίαζε παράξενα φαινόμενα πάγου.

Γιατί ξεκίνησε το ταξίδι;

Υπάρχουν διάφορες θεωρίες:

- Ίσως η Μασσαλία επιδίωκε νέες εμπορικές διαδρομές.
- Ίσως αναζητούσε τις πηγές του κασσίτερου, πολύτιμου μετάλλου για την κατασκευή μπρούντζου.
- Ίσως ενδιαφερόταν κυρίως για επιστημονική έρευνα και γεωγραφική εξερεύνηση.

Πιθανότατα το ταξίδι του συνδύαζε και τους τρεις αυτούς σκοπούς.

Τι ήταν η Θούλη;

Η ακριβής θέση της Θούλης παραμένει αντικείμενο συζήτησης. Έχουν προταθεί:

- η Ισλανδία
- η Νορβηγία
- οι Νήσοι Φερόες
- τα Νησιά Σέτλαντ

Πολλοί σύγχρονοι μελετητές θεωρούν πιθανότερο ότι έφτασε στις ακτές της Νορβηγίας.

Επιστημονικές παρατηρήσεις

Ο Πυθέας δεν ήταν απλώς ταξιδιώτης. Έκανε αξιοσημείωτες επιστημονικές παρατηρήσεις:

- Μέτρησε το γεωγραφικό πλάτος με αστρονομικές μεθόδους.
- Παρατήρησε τη σχέση μεταξύ των παλιρροιών και της Σελήνης.

- Κατέγραψε το φαινόμενο του «λευκού καλοκαιρινού λυκόφωτος» των βόρειων περιοχών.
- Έδωσε από τις πρώτες αξιόπιστες περιγραφές της Βρετανίας και των λαών της.

Η σχέση του με τους Κέλτες

Ο Πυθέας ήταν από τους πρώτους Έλληνες που περιέγραψαν τους κελτικούς λαούς της δυτικής Ευρώπης. Κατέγραψε πληροφορίες για τα ήθη, το εμπόριο και τον τρόπο ζωής τους. Αυτό τον καθιστά έναν από τους πρώτους «εθνογράφους» της ευρωπαϊκής ιστορίας.

Το έργο του

Έγραψε ένα βιβλίο με τίτλο Περί Ωκεανού, το οποίο δυστυχώς δεν σώζεται. Τι γνωρίζουμε προέρχεται από αποσπάσματα και αναφορές μεταγενέστερων συγγραφέων, όπως ο Στράβων και ο Πλίνιος ο Πρεσβύτερος.

Οι αμφισβητήσεις που δέχθηκε

Όταν επέστρεψε, πολλοί λόγιοι δεν πίστεψαν όσα διηγήθηκε. Ο Στράβων τον κατηγορήσε ότι υπερέβαλλε ή ακόμη και ότι έλεγε ψέματα.

Οι λόγοι ήταν κατανοητοί:

- Οι Έλληνες δεν γνώριζαν τις πολικές ημέρες.
- Η ύπαρξη θαλάσσιου πάγου φαινόταν απίστευτη.
- Οι τεράστιες αποστάσεις που περιέγραφε θεωρούνταν υπερβολικές.

Σήμερα όμως γνωρίζουμε ότι πολλές από τις παρατηρήσεις του ήταν σωστές.

Ένα ενδιαφέρον στοιχείο

Ο Πυθέας έζησε μόλις λίγες δεκαετίες μετά τον Αριστοτέλη και ήταν σχεδόν σύγχρονος του Μεγάλου Αλεξάνδρου. Ενώ ο Αλέξανδρος εξερευνούσε την Ανατολή, ο Πυθέας εξερευνούσε τον άγνωστο Βορρά. Για τον λόγο αυτό πολλοί ιστορικοί τον αποκαλούν «τον Αλέξανδρο των θαλασσών του Βορρά».

Το παράδοξο είναι ότι, παρόλο που υπήρξε ένας από τους μεγαλύτερους εξερευνητές της αρχαιότητας, το ίδιο το βιβλίο του χάθηκε και η φήμη του διασώθηκε μόνο μέσα από

αποσπάσματα άλλων συγγραφέων. Αυτό κάνει τον Πυθέα μία από τις πιο μυστηριώδεις προσωπικότητες της αρχαίας ελληνικής ιστορίας.

Η συμβολή του στην επιστήμη

Ο Πυθέας ήταν από τους πρώτους που:

- χρησιμοποίησαν αστρονομικές παρατηρήσεις για γεωγραφικές μετρήσεις,
- συνέδεσαν τις παλίρροιες με τις φάσεις της Σελήνης,
- κατέγραψαν το φαινόμενο του «ήλιου του μεσονυχτίου» στις βόρειες περιοχές.

Για την εποχή του, αυτά ήταν εξαιρετικά προχωρημένα συμπεράσματα.

Γιατί είναι σημαντικός;

Ο Πυθέας θεωρείται πρωτοπόρος της επιστημονικής εξερεύνησης. Ενώ πολλοί αρχαίοι συγγραφείς αμφισβήτησαν τις αφηγήσεις του, αρκετές από τις περιγραφές του επιβεβαιώθηκαν αιώνες αργότερα. Σήμερα αναγνωρίζεται ως ο πρώτος Έλληνας που περιέγραψε με σχετική ακρίβεια τον βόρειο Ατλαντικό και τις περιοχές κοντά στον Αρκτικό Κύκλο. Γι' αυτό συχνά αποκαλείται «ο Έλληνας που ανακάλυψε τον Βορρά».

ΝΤΟΚΙΜΑΝΤΕΡ ΓΙΑ ΤΟΝ ΠΥΘΕΑ ΤΟΝ ΜΑΣΣΑΛΙΩΤΗ:

<https://www.youtube.com/watch?v=dkCPuRqqs2Y&t=39s>

2. Προπυθαγόρειοι, Πυθαγόρειοι και FunFacts

Οι Προπυθαγόρειοι και οι πρώτες μαθηματικές γνώσεις

Πριν από την εμφάνιση της σχολής του Πυθαγόρα τον 6ο αιώνα π.Χ., οι πρώτες μαθηματικές γνώσεις είχαν ήδη αναπτυχθεί σε διάφορους πολιτισμούς της Ανατολής, ιδιαίτερα στη Μεσοποταμία. Οι λαοί της περιοχής, όπως οι Ασσύριοι και οι Βαβυλώνιοι, καλλιέργησαν σημαντικές πρακτικές μαθηματικές γνώσεις που χρησιμοποιούνταν κυρίως για **καθημερινές ανάγκες, όπως το εμπόριο, τη γεωργία, τη μέτρηση γης και την αστρονομία.**

Οι Μεσοποταμίοι ανέπτυξαν ένα ιδιαίτερα εξελιγμένο αριθμητικό σύστημα, το λεγόμενο **εξηκονταδικό σύστημα** (βάση το 60), το οποίο χρησιμοποιείται ακόμη και σήμερα σε ορισμένες περιπτώσεις, όπως στη μέτρηση του χρόνου και των γωνιών. Μέσα από πήλινες πινακίδες που έχουν βρεθεί από αρχαιολογικές ανασκαφές γνωρίζουμε ότι μπορούσαν να λύνουν προβλήματα γεωμετρίας και αριθμητικής, να υπολογίζουν εμβαδά και όγκους και να χρησιμοποιούν πίνακες πολλαπλασιασμού και τετραγώνων. Παράλληλα, φαίνεται ότι γνώριζαν και ορισμένες αριθμητικές σχέσεις που αργότερα θα συνδεθούν με το πυθαγόρειο θεώρημα, χωρίς όμως να το διατυπώνουν ως γενικό μαθηματικό νόμο.

Οι μαθηματικές γνώσεις των Μεσοποταμίων και των Ασσυρίων ήταν κυρίως **πρακτικές και εμπειρικές. Αναπτύχθηκαν για να εξυπηρετούν καθημερινές ανάγκες της κοινωνίας, όπως η κατασκευή κτιρίων, η διανομή της γης ή η πρόβλεψη αστρονομικών φαινομένων. Δεν υπήρχε ακόμη η έννοια της αυστηρής μαθηματικής απόδειξης ή της φιλοσοφικής θεμελίωσης των μαθηματικών.**

Στην Ελλάδα, πριν από τον Πυθαγόρα, εμφανίζεται ένας από τους σημαντικότερους στοχαστές της αρχαίας επιστήμης, ο **Θαλής ο Μιλήσιος**. Ο Θαλής θεωρείται ένας από τους πρώτους φιλοσόφους που προσπάθησαν να εξηγήσουν τον κόσμο **με λογικό και επιστημονικό τρόπο, αντί να βασίζονται αποκλειστικά σε μυθολογικές εξηγήσεις.**

Στον τομέα των μαθηματικών, ο Θαλής έκανε ένα σημαντικό βήμα προς την ανάπτυξη της **γεωμετρικής σκέψης**. Του αποδίδονται αρκετά γεωμετρικά θεωρήματα, όπως το ότι η γωνία σε ημικύκλιο είναι ορθή και ότι οι γωνίες στη βάση ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες. Επιπλέον, σύμφωνα με αρχαίες πηγές, κατάφερε να υπολογίσει το ύψος των πυραμίδων της Αιγύπτου χρησιμοποιώντας τις σκιές τους, εφαρμόζοντας γεωμετρικές αναλογίες.

Πώς ο Θαλής έγινε πλούσιος με Μαθηματικά!!! Πάρτε ιδέες.

Μια πολύ γνωστή ιστορία που αναφέρει ο Αριστοτέλης λέει ότι πολλοί άνθρωποι κορόιδευαν τον Θαλή επειδή ήταν φιλόσοφος και δεν είχε χρήματα. Πίστευαν ότι η φιλοσοφία και η επιστημονική σκέψη δεν είχαν καμία πρακτική αξία.

Ο Θαλής όμως θέλησε να αποδείξει το αντίθετο. Παρατηρώντας τα αστέρια και τα καιρικά φαινόμενα, προέβλεψε ότι την επόμενη χρονιά θα υπήρχε **πολύ μεγάλη παραγωγή ελιάς**.

Πριν αρχίσει η συγκομιδή, νοίκιασε πολύ φθηνά όλα τα ελαιοτριβεία της περιοχής γύρω από τη Μίλητο. Όταν πράγματι η παραγωγή ελιάς ήταν τεράστια, όλοι οι παραγωγοί χρειάζονταν ελαιοτριβεία για να επεξεργαστούν τις ελιές τους.

Έτσι, ο Θαλής μπορούσε να τα νοικιάσει σε πολύ υψηλή τιμή και κέρδισε πολλά χρήματα. Με αυτόν τον τρόπο απέδειξε ότι **η γνώση και η επιστημονική σκέψη μπορούν να έχουν τεράστια πρακτική αξία**.

Η ιστορία με το πηγάδι και τα αστέρια

Ξέρετε ότι ο πρώτος μαθηματικός της Ευρώπης ήταν επίσης ο πρώτος άνθρωπος που έπεσε σε πηγάδι κοιτώντας τα αστέρια;;

Λέγεται ότι μια μέρα περπατούσε κοιτάζοντας συνεχώς τα αστέρια και τον ουρανό, προσπαθώντας να κατανοήσει τα ουράνια φαινόμενα.

Επειδή όμως κοιτούσε ψηλά και όχι μπροστά του, **έπεσε μέσα σε ένα πηγάδι**. Μια γυναίκα που ήταν εκεί κοντά άρχισε να γελάει και του είπε ότι προσπαθεί να μάθει τι συμβαίνει στον ουρανό, αλλά δεν βλέπει καν τι υπάρχει μπροστά στα πόδια του.

Η ιστορία αυτή χρησιμοποιείται συχνά για να δείξει τη διαφορά ανάμεσα στη **θεωρητική σκέψη και την καθημερινή ζωή**, αλλά ταυτόχρονα δείχνει και πόσο έντονη ήταν η περιέργεια των πρώτων επιστημόνων για την κατανόηση του κόσμου.

Η πρόβλεψη της έκλειψης

Ένα από τα πιο εντυπωσιακά επιτεύγματα που αποδίδονται στον Θαλή είναι ότι προέβλεψε μια **ηλιακή έκλειψη το 585 π.Χ.** Το γεγονός αυτό ήταν τόσο εντυπωσιακό για τους ανθρώπους της εποχής, ώστε θεωρήθηκε απόδειξη ότι τα φυσικά φαινόμενα δεν είναι τυχαία αλλά μπορούν να εξηγηθούν και να προβλεφθούν μέσω της γνώσης και της παρατήρησης.

Η έκλειψη αυτή μάλιστα συνέβη κατά τη διάρκεια μιας μάχης και λέγεται ότι οι στρατιώτες, τρομαγμένοι από το σκοτάδι που εμφανίστηκε ξαφνικά στον ουρανό, σταμάτησαν τη μάχη.

Η ιστορία με τις πυραμίδες της Αιγύπτου

Λέγεται ότι όταν ο Θαλής ταξίδεψε στην Αίγυπτο, οι Αιγύπτιοι εντυπωσιάστηκαν από την ικανότητά του να λύνει πρακτικά προβλήματα με γεωμετρία.

Οι άνθρωποι της εποχής ήθελαν να μάθουν το **ύψος των πυραμίδων**, αλλά δεν υπήρχε εύκολος τρόπος να το μετρήσουν. Ο Θαλής πρότεινε μια πολύ απλή αλλά ιδιοφυή λύση.

Περίμενε μέχρι τη στιγμή της ημέρας που η σκιά ενός ανθρώπου είχε **ακριβώς το ίδιο μήκος με το ύψος του**. Εκείνη τη στιγμή, η σκιά της πυραμίδας θα είχε επίσης μήκος ίσο με το ύψος της. Έτσι απλώς μέτρησε τη σκιά της πυραμίδας και βρήκε το ύψος της.

Η ιστορία αυτή δείχνει πώς η **γεωμετρική σκέψη μπορεί να λύσει πρακτικά προβλήματα χωρίς περίπλοκα εργαλεία**.

Ο Θαλής και το ερώτημα του σύμπαντος

Ο Θαλής δεν ασχολήθηκε μόνο με τα μαθηματικά αλλά και με τη φιλοσοφία της φύσης. Όταν τον ρώτησαν ποια είναι η βασική ουσία από την οποία αποτελείται ο κόσμος, απάντησε ότι είναι το **νερό**.

Η απάντηση αυτή μπορεί να φαίνεται απλή, αλλά ήταν επαναστατική για την εποχή. Για πρώτη φορά ένας στοχαστής προσπαθούσε να εξηγήσει τον κόσμο **χωρίς να χρησιμοποιεί μύθους ή θεούς**, αλλά με λογική σκέψη και παρατήρηση της φύσης.

Αυτή η αλλαγή στον τρόπο σκέψης θεωρείται από πολλούς ιστορικούς η **αρχή της επιστήμης στην Ευρώπη**.

Η απάντηση που άφησε τους μαθητές του άφωνους

Λέγεται ότι κάποτε ρώτησαν τον Θαλή ποιο είναι το πιο δύσκολο πράγμα στον κόσμο και ποιο το πιο εύκολο.

Η απάντησή του ήταν εντυπωσιακά φιλοσοφική:

- Το πιο δύσκολο πράγμα είναι **να γνωρίσεις τον εαυτό σου**.
- Το πιο εύκολο είναι **να δίνεις συμβουλές στους άλλους**.

Αυτή η απάντηση δείχνει ότι οι πρώτοι μαθηματικοί δεν ενδιαφέρονταν μόνο για αριθμούς αλλά και για **βαθύτερα φιλοσοφικά ερωτήματα**.

Ο Αναξίμανδρος και ο πρώτος χάρτης του κόσμου

Ένας από τους μαθητές του Θαλή του Μιλήσιου ήταν ο Αναξίμανδρος από τη Μίλητο. Ο Αναξίμανδρος ήταν από τους πρώτους ανθρώπους που προσπάθησαν να καταλάβουν **πώς μοιάζει ολόκληρη η Γη**.

Σε μια εποχή όπου οι περισσότεροι άνθρωποι γνώριζαν μόνο την περιοχή γύρω από την πόλη τους, ο Αναξίμανδρος τόλμησε κάτι πολύ φιλόδοξο: προσπάθησε να σχεδιάσει **τον πρώτο χάρτη του γνωστού κόσμου**.

Στον χάρτη αυτόν προσπάθησε να τοποθετήσει τις περιοχές που γνώριζαν οι Έλληνες: τη Μεσόγειο, τη Μικρά Ασία, την Αίγυπτο και άλλες περιοχές. Αν και ο χάρτης του ήταν πολύ

απλώς σε σύγκριση με τους σύγχρονους, ήταν μια τεράστια καινοτομία, γιατί για πρώτη φορά κάποιος προσπαθούσε να **αναπαραστήσει μαθηματικά τον κόσμο σε μια επιφάνεια.**

Η προσπάθεια αυτή ήταν ουσιαστικά η αρχή της **χαρτογραφίας**. Σήμερα οι χάρτες, τα GPS και οι δορυφορικές εικόνες βασίζονται σε μαθηματικά και γεωμετρία — κάτι που ξεκίνησε από τέτοιες πρώτες ιδέες.

Η “τρελή” ιδέα για τη Γη

Ακόμη πιο εντυπωσιακό είναι ότι ο Αναξίμανδρος είχε μια ιδέα που φαινόταν παράξενη για την εποχή: υποστήριξε ότι η Γη **δεν χρειάζεται να στηρίζεται σε τίποτα.**

Οι περισσότεροι άνθρωποι τότε πίστευαν ότι η Γη στηρίζεται σε κάποιο ζώο, σε θεούς ή σε κάποιο άλλο αντικείμενο. Ο Αναξίμανδρος όμως πρότεινε ότι η Γη **αιωρείται στο κέντρο του σύμπαντος** επειδή βρίσκεται στην ίδια απόσταση από όλα τα πράγματα γύρω της.

Η ιδέα αυτή ήταν επαναστατική, γιατί βασιζόταν σε **λογικό συλλογισμό και όχι σε μύθους**. Για αυτό πολλοί ιστορικοί θεωρούν τον Αναξίμανδρο έναν από τους πρώτους ανθρώπους που χρησιμοποίησαν **επιστημονικό τρόπο σκέψης**.

Ο Αναξαγόρας και το «περίεργο» φεγγάρι

Ένας άλλος σημαντικός Προπυθαγόρειος ήταν ο Αναξαγόρας. Την εποχή του οι περισσότεροι άνθρωποι πίστευαν ότι η Σελήνη ήταν ένα θεϊκό σώμα ή κάτι μυστηριώδες στον ουρανό.

Ο Αναξαγόρας όμως τόλμησε να πει κάτι πολύ διαφορετικό: ότι η **Σελήνη είναι μια πέτρα**, παρόμοια με τη Γη, που απλώς αντανακλά το φως του Ήλιου.

Μάλιστα εξήγησε και γιατί βλέπουμε τις φάσεις της Σελήνης: επειδή φωτίζεται από τον Ήλιο με διαφορετικό τρόπο καθώς κινείται. Η ιδέα αυτή θεωρήθηκε τόσο ριζοσπαστική ώστε τελικά ο Αναξαγόρας κατηγορήθηκε για ασέβεια προς τους θεούς και εξορίστηκε από την Αθήνα.

Ο Αναξαγόρας και ο μετεωρίτης

Ο Αναξαγόρας είχε επίσης μια πολύ τολμηρή ιδέα για τα ουράνια σώματα. Υποστήριξε ότι στον ουρανό υπάρχουν **πέτρες που κινούνται στο διάστημα.**

Πολλοί τον κορόιδευαν γι’ αυτή την ιδέα. Όμως σύμφωνα με μια παράδοση, κάποια χρόνια αργότερα έπεσε ένας μεγάλος μετεωρίτης στην περιοχή της Θράκης. Οι άνθρωποι της εποχής εντυπωσιάστηκαν γιατί φαινόταν ότι ο Αναξαγόρας είχε προβλέψει ότι **πέτρες μπορούν να πέσουν από τον ουρανό.**

Σήμερα φυσικά γνωρίζουμε ότι οι μετεωρίτες είναι πράγματι κομμάτια βράχου από το διάστημα.

Ο Θαλής και οι στοχαστές της εποχής του θεωρούνται **Προπυθαγόρειοι**, δηλαδή φιλόσοφοι και μαθηματικοί που προηγήθηκαν του Πυθαγόρα και προετοίμασαν το έδαφος για την ανάπτυξη των μαθηματικών στην αρχαία Ελλάδα. Η συμβολή τους ήταν καθοριστική, διότι άρχισαν να αντιμετωπίζουν τα μαθηματικά όχι μόνο ως πρακτικό εργαλείο αλλά και ως μέσο κατανόησης του κόσμου.

Ωστόσο, υπήρχε σημαντική διαφορά ανάμεσα στους Προπυθαγορείους και στους Πυθαγορείους. Οι Προπυθαγόρειοι χρησιμοποιούσαν τα μαθηματικά κυρίως για πρακτικούς σκοπούς και για την επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων. Αντίθετα, οι Πυθαγόρειοι, υπό την καθοδήγηση του Πυθαγόρα, έδωσαν στα μαθηματικά έναν πολύ πιο **θεωρητικό και φιλοσοφικό χαρακτήρα**. Πίστευαν ότι οι αριθμοί αποτελούν τη θεμελιώδη αρχή της πραγματικότητας και ότι ολόκληρο το σύμπαν διέπεται από μαθηματικές σχέσεις και αρμονίες.

Με αυτόν τον τρόπο, ενώ οι Προπυθαγόρειοι έθεσαν τις βάσεις της μαθηματικής γνώσης μέσα από πρακτικές εφαρμογές και πρώιμες γεωμετρικές ιδέες, οι Πυθαγόρειοι μετέτρεψαν τα μαθηματικά σε **κεντρικό στοιχείο της φιλοσοφίας και της επιστημονικής σκέψης**. Αυτή η μετάβαση από την πρακτική χρήση των αριθμών στη θεωρητική και φιλοσοφική μελέτη τους αποτέλεσε ένα από τα σημαντικότερα βήματα στην ιστορία των μαθηματικών.

Πυθαγόρας

Τι γνωρίζουμε για τη ζωή του

Τα στοιχεία για την χρονολογία και τη ζωή του Πυθαγόρα είναι εξαιρετικά αντιφατικά. Σύμφωνα με την παράδοση γεννήθηκε γύρω στο 570 π.Χ. και έζησε:¹

- 18 χρόνια στη Σάμο
- 4 χρόνια στη Σύρο και στην Ιωνία
- 12 χρόνια στην Αίγυπτο
- 18 χρόνια στη Βαβυλωνία
- 4 χρόνια στη Σάμο
- 39 χρόνια στην Κάτω Ιταλία (από αυτά 20 χρόνια στον Κρότωνα και 19 χρόνια στο Μεταπόντιο)

Μετά από μια διεξοδική μελέτη των πηγών ο μελετητής της ζωής και του μαθηματικού έργου του Πυθαγόρα, Kurt von Fritz καταλήγει:

- δεν επιδέχεται καμία αμφισβήτηση, ότι ο Πυθαγόρας γεννήθηκε και πέρασε την νεότητά του στη Σάμο,
- δεν είναι απίθανο, στην αρχή της εφηβείας του να είχε ακούσει τον **Θαλή** και τον **Αναξίμανδρο**, είναι όμως σίγουρο, ότι γνώριζε την φιλοσοφία τους,
- είναι εντελώς πιθανόν να είχε ταξιδέψει στην Αίγυπτο και Βαβυλωνία, ακόμη και αν τα στοιχεία για τον χρόνο παραμονής του είναι διαφορετικά και συχνά αντιφατικά,
- είναι σίγουρο ότι κατείχε γνώσεις **βαβυλωνιακών μαθηματικών και αστρονομικών μεθόδων καθώς και υπολογιστικά αποτελέσματα**,
- το 525 π.Χ. πηγαίνει στην Κάτω Ιταλία, όπου αναμφισβήτητα όχι μόνο δίδαξε, αλλά ίδρυσε μια κλειστή αδελφότητα, της οποίας το κέντρο των δραστηριοτήτων της ήταν καταρχήν ο Κρότωνας.

Τι ξέρουμε για τα Μαθηματικά του Πυθαγόρα και των Πυθαγορείων

Η Πυθαγόρεια Σχολή θεώρησε ότι μέσα από τα Μαθηματικά μπορούμε να καταλάβουμε την οργάνωση και τη λογική που διέπει τον κόσμο. Συνέλαβε μάλιστα ολόκληρο τον κόσμο ως αρμονία και αριθμό. Θεώρησε ότι η τάξη του σύμπαντος μπορεί να εκφραστεί με αριθμητικές σχέσεις.

Οι Μιλήσιοι πριν από τον Πυθαγόρα είχαν προσπαθήσει να βρουν υλικά αίτια για να εξηγήσουν τον κόσμο. Ο Θαλής, προσωκρατικός φιλόσοφος του 6ου π.Χ. και ιδρυτής της Ιωνικής Σχολής στη Μίλητο, θεωρούσε ότι η αρχή του κόσμου είναι το **νερό**. Ήταν αυτός που έθεσε τις βάσεις για την ανάπτυξη της θεωρητικής σκέψης στα Μαθηματικά. **Με τον Πυθαγόρα γίνεται η απομάκρυνση από υλικά αίτια για την κατανόηση του κόσμου σε νοητικά αίτια και αρχές, όπως είναι ο Αριθμός. Το νέο που έφεραν οι Πυθαγόρειοι, ήταν ότι έκαναν τα Μαθηματικά βάση της Φιλοσοφίας!!**

Ο Αριστοτέλης (384–322 π.Χ.) που αποτελεί την κύρια πηγή μας για τον Πυθαγορισμό, αναφέρεται σε πολλά σημεία του έργου του στους Πυθαγόρειους και τη σχέση τους με τον Αριθμό. Διαβάζουμε στα «Μετά τα Φυσικά» (Μ.τ.φ.) του Αριστοτέλη:

- ο αριθμός είναι η αρχή

[Μ.τ.φ. Α5, 986a 16] [Αριστοτέλης 2009, σελ. 167](#): οὗτοι τὸν ἀριθμὸν νομίζοντες ἀρχὴν εἶναι

- αρχές [των όντων] είναι οι αριθμοί

[Μ.τ.Φ. Β5, 1002a 11-12][Αριστοτέλης1992, Τόμος 10, σελ. 171](#): ὥστε καὶ τὰς ἀρχὰς τῶν σωμάτων τῶν ὄντων εἶναι ἀρχὰς οἷδ' ὕστερο καὶ σοφώτεροι τούτων εἶναι δόξαντες ἀριθμούς

- τα ἴδια τα πράγματα εἶναι οἱ ἀριθμοί

[Μ.τ.Φ. Α6, 987b 27-28][Αριστοτέλης2009, σελ. 177](#): οἷδ' ἀριθμούς εἶναι φασιν αὐτὰ τὰ πράγματα

- ο ἀριθμός εἶναι ἡ οὐσία τῶν πάντων

[Μ.τ.Φ. Α5, 987a 19][Αριστοτέλης2009, σελ. 171](#): ...καὶ ἀριθμὸν εἶναι τὴν οὐσίαν πάντων

- οἱ ἀριθμοὶ αποτελοῦν αἰτίες τῆς οὐσίας ὅλων τῶν ἄλλων πραγμάτων

[Μ.τ.Φ. Α6, 987b 24-25][Αριστοτέλης1992, Τόμος 10, σελ. 81](#): ...τὸ τοὺς ἀριθμούς αἰτίους εἶναι τοῖς ἄλλοις τῆς οὐσίας ὡς αὐτὸς ἐκείνοις

- οἱ ἀρχές τῶν μαθηματικῶν εἶναι οἱ ἀρχές ὅλων τῶν πραγμάτων

[Μ.τ.Φ. Α5, 985b 25-26][Αριστοτέλης2009, σελ. 165](#): ἐν τῷ ἀντιθέτῳ τῶν ἀρχῶν τῶν ὄντων ἀρχὰς ὡς ἡγήθησαν εἶναι πάντων

- τα ἀνάγουν ὅλα στοὺς ἀριθμούς

[Μ.τ.Φ. Ζ11, 1036b 12][Αριστοτέλης1992, Τόμος 11, σελ. 81](#): ...καὶ ἀνάγουσι πάντα εἰς τοὺς ἀριθμούς

- τα σώματα αποτελοῦνται ἀπὸ ἀριθμούς

[Μ.τ.Φ. Μ8, 1083b 11][Αριστοτέλης1992, Τόμος 12, σελ. 183](#): τὸ δὲ τὰ σώματα ἐξ ἀριθμῶν εἶναι συγκείμενα

- παράγουν τα φυσικὰ σώματα ἀπὸ ἀριθμούς

[Μ.τ.Φ. Ν3, 1090a 32][Αριστοτέλης1992, Τόμος 12, σελ. 229](#): τὸ ποιεῖν ἐξ ἀριθμῶν τὰ φυσικὰ σώματα

- τα ὄντα εἶναι ἀριθμοί, ..., ὅτι ἀπὸ αὐτοῦς αποτελοῦνται τα ὄντα

[Μ.τ.Φ. Ν3, 1090a 22-23][Αριστοτέλης1992, Τόμος 12, σελ. 227](#): ...εἶναι μὲν ἀριθμοὺς ἐποίησαν τὰ ὄντα, οὐ χωριστοὺς δέ, ἀλλ' ἐξ ἀριθμῶν τὰ ὄντα

- κατασκευάζουν ολόκληρο τὸ σύμπαν ἀπὸ ἀριθμούς

[Μ.τ.Φ. Μ6, 1080b, 18-19][Αριστοτέλης1992, Τόμος 12, σελ. 163](#): τὸν γὰρ ὅλον οὐρανὸν κατασκευάζουσιν ἐξ ἀριθμῶν

- τα στοιχεῖα τῶν ἀριθμῶν εἶναι τα στοιχεῖα ὅλων τῶν ὄντων καὶ [ὅτι] ολόκληρος ὁ οὐρανὸς δὲν εἶναι παρὰ ἀρμονία καὶ ἀριθμός

[Μ.τ.Φ. Α5, 986a 2 καὶ 3][Αριστοτέλης1992, Τόμος 10, σελ. 71](#): τὰ τῶν ἀριθμῶν στοιχεῖα τῶν ὄντων στοιχεῖα πάντων ὑπέλαβον εἶναι, καὶ τὸν ὅλον οὐρανὸν ἀρμονίαν εἶναι καὶ ἀριθμὸν

- ὅλα τα ... ὄντα φαίνονται νὰ εἶναι τέλεια ἀπεικόνιση τῶν ἀριθμῶν

[Μ.τ.Φ. Α5, 985b 33-34][Αριστοτέλης1992, Τόμος 10, 1993, σελ. 71](#): ἐπεὶ δὴ τὰ μὲν ἄλλα τοῖς ἀριθμοῖς ἐφαίνοντο τὴν φύσιν ἀφωμοιωσθαι πᾶσαν

- στοιχεῖα τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι τὸ ἄρτιο καὶ τὸ περιττό, ὅπου τὸ περιττό εἶναι πεπερασμένο καὶ τὸ ἄρτιο εἶναι ἀπείρο.

[Μ.τ.Φ. Α5, 986a 17-19][Αριστοτέλης2009, σελ. 167](#): ...τὸ δὲ ἀριθμοῦ στοιχεῖα τὸ τε ἄρτιον καὶ τὸ περιττόν, τούτων δὲ τὸ μὲν πεπερασμένον τὸ δὲ ἄπειρον

- Τὸ Ἐνα συνίσταται καὶ ἀπὸ τα δύο, καθὼς εἶναι καὶ ἄρτιο καὶ περιττό.

[Μ.τ.Φ. Α5, 986a 19-20][Αριστοτέλης2009, σελ. 167](#): τὸ δ' ἑνὲς ἀμφοτέρων εἶναι τούτων (καὶ γὰρ ἄρτιον εἶναι καὶ περιττόν)

- Ο ἀριθμός πρόερχεται ἀπὸ τὸ Ἐνα, ... ἀριθμοὶ συνιστοῦν τὴν ολότητα τοῦ οὐρανοῦ.

- τα ὄντα υπάρχουν με τη μίμηση των αριθμών

[Μ.τ.Φ. Α6, 987b 11-12]

Τι είναι, λοιπόν, αριθμός στους Πυθαγόρειους και ποια η σχέση του με τα πράγματα

Να πούμε σ' αυτό το σημείο ότι σε αντίθεση με την αντίληψη που έχουμε εμείς για τους αριθμούς, οι Πυθαγόρειοι δεν έβλεπαν τους αριθμούς ισότιμα μεταξύ τους. Ο κάθε αριθμός είχε μια συγκεκριμένη λειτουργία. Η αρχή της Πυθαγόρειας Θεωρίας Αριθμών (αν μπορούμε να την ονομάσουμε έτσι) συνίσταται στην ταξινόμησή τους σε καθορισμένες κατηγορίες με βάση το υπόλοιπο της διαίρεσης με τον αριθμό 10. Ο Πυθαγόρας, αν δεν επινόησε, σίγουρα συστηματοποίησε την ελληνική αριθμητική σε δεκαδική και προσθετική, σε αντίθεση με την χαλδαϊκή που ήταν εξηνταδική και θεσιακή (ατελής).

Με βάση λοιπόν το υπόλοιπο της διαίρεσης όλοι οι αριθμοί διαιρούνται σε δέκα τάξεις: Η πρώτη περιλαμβάνει τους φυσικούς αριθμούς που δίνουν υπόλοιπο 1 όταν διαιρούνται με το 10, η δεύτερη κατηγορία όσους δίνουν υπόλοιπο 2 δια του 10 και ούτω κάθε εξής ως τη δέκατη τάξη της δεκάδας, η οποία περιλαμβάνει όλους τους φυσικούς αριθμούς που διαιρούνται δια του 10 χωρίς να αφήνουν υπόλοιπο. Έτσι όλα ξεκινούν από τον αριθμό 10 και καταλήγουν στο 10, πράγμα που αποκαλύπτει και την οντολογία του 10 στην Πυθαγόρεια φιλοσοφία.

Περιττοί και Άρτιοι

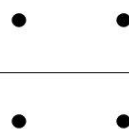
Με αυτήν την επιλογή ως αφετηρία οι Πυθαγόρειοι διαιρούσαν τον αριθμό, η ουσία του οποίου είναι η μονάδα, σε περιττούς και άρτιους. Οι περιττοί είναι πεπερασμένοι, περιορισμένοι. Οι άρτιοι είναι απεριόριστοι, άπειροι.

Γιατί χαρακτηρίζονταν ο περιττός πεπερασμένος, ο άρτιος άπειρος;

Ο περιττός δεν μπορεί να διαιρεθεί σε δύο ίσα μέρη, για παράδειγμα ο 5 έχει συστατικό του στοιχείο τη μονάδα 2+1+2, περιορίζεται δηλαδή από τη μονάδα. Με σημερινά λόγια, αν τον διαιρέσουμε με τον 2 αφήνει πάντα υπόλοιπο τη μονάδα.

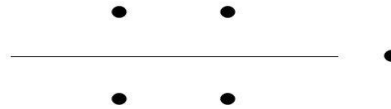
Αντίθετα ο άρτιος μπορεί να διαιρεθεί σε δύο ίσα μέρη, συνεπώς δεν περιορίζεται από τη μονάδα, είναι άπειρος. Επειδή ο άρτιος μπορεί να διαιρεθεί σε δύο μέρη χαρακτηρίζεται «θηλυκός», ενώ ο περιττός χαρακτηρίζεται «αρσενικός» αριθμός.

Ο περιττός επειδή έχει αρχή, μέση και τέλος, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα ο 5 έχει το 2 ως αρχή, το 1 μέση και το 2 τέλος, αντιπροσωπεύει την ολότητα. Υπάρχει επιπλέον ένας



φυσικός δεσμός μεταξύ περιττών και αρτίων: Δεδομένου ότι κάθε άρτιος διαιρείται σε δύο ίσα μέρη, τα μέρη αυτά μπορούν να χωριστούν από μια ευθεία που προεκτείνεται επ' αόριστον από τις δύο πλευρές. (για την σχετική αναπαράσταση των αρτίων και περιττών:

Αντιθέτως ο περιττός εισάγει μια διάμεση μονάδα που τον περιορίζει.



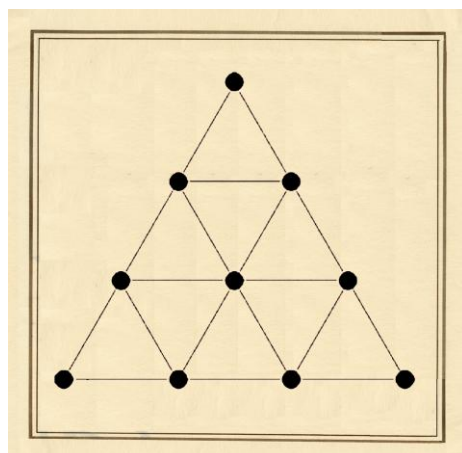
Η θεωρία των Αρτίων και Περιττών στα ΣΤΟΙΧΕΙΑ του Ευκλείδη (βιβλίο IX), σύμφωνα με τον Oscar Becker, είναι από ένα παλαιό μαθηματικό κομμάτι, το οποίο ο Ευκλείδης εισήγαγε χωρίς καμιά αλλαγή, που οι συγγραφείς του πιθανότατα ήταν Πυθαγόρειοι.

Παραστατικοί Αριθμοί: Τρίγωνοι, Τετράγωνοι, ...

Περνάμε στους «παραστατικούς» αριθμούς, αριθμούς που παριστάνουν ένα τρίγωνο, ένα τετράγωνο, ένα πεντάγωνο κλπ. Ποιοι είναι και πώς παράγονται; Είναι αριθμοί που δημιουργούν γεωμετρικά σχήματα και άρα δημιουργούν το γεωμετρικό χώρο;

Οι Πυθαγόρειοι με την βοήθεια των σημείων, των μονάδων θέλησαν να δημιουργήσουν το γεωμετρικό φυσικό χώρο. Ταυτίζοντας λοιπόν τον αριθμό με ένα σημείο, οριοθετούσαν την ευθεία, τα δύο άκρα της, με δύο σημεία και κατά συνέπεια εξομοίωναν την ευθεία με τον αριθμό 2. Για να μπορέσουν να προχωρήσουν στο επόμενο που είναι το επίπεδο, προσέθεταν ένα ακόμη σημείο, οπότε ταύτιζαν το επίπεδο με τον αριθμό 3. Κατά αναλογία ο χώρος ταυτίζεται με τον αριθμό 4.

Οι τέσσερις πρώτοι αριθμοί συγκροτούν στην Πυθαγόρεια Φιλοσοφία το «ιερό τρίγωνο της Τετράδας» (Τετρακτύς όπως λέγεται), το άθροισμα της οποίας είναι η Δεκάδα ($1 + 2 + 3 + 4 = 10$), που θεωρείται από τους Πυθαγόρειους ο τέλειος αριθμός του Παντός.



Πυθαγορική Τετρακτύς

Ίσως το κομμάτι της πυθαγόρειας αριθμολογίας που επηρέασε περισσότερο τους μετέπειτα φιλοσόφους ήταν η έννοια της Τετρακτύος. Τι ήταν ωστόσο η Τετρακτύς; Σε μια πρώτη ανάλυση είναι το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων αριθμών: $1+2+3+4=10$

Ο αριθμός **1** θεωρείται το Άναρχο Ον, το πνεύμα, ο αιθέρας, η ενέργεια-δύναμη-βούληση από την οποία όλα εκπορεύονται. Με την προσθήκη μιας δυάδας στη μονάδα ο κόσμος λαμβάνει μορφή. Με τη δυαδικότητα γεννιέται η πρώτη αντίφαση, εφόσον το **2** είναι το άμεσο αντίθετο του **1**. Ο δυαδισμός έχει ξεκινήσει! Η δυάδα συνδέεται με τη θηλυκή ενέργεια, την απεριόριστη γονιμότητα, τη μήτρα από όπου όλα θα γεννηθούν.

Με τον ιερό αριθμό **3**, ο κόσμος μέσα από τη διάνοια αποκτάει διάσταση. Το τρίγωνο, η απλούστερη μορφή των όντων γεννιέται. Αρχή, μέση και τέλος στη δημιουργία γίνονται γέννηση, ζωή, θάνατος. Αυτό το μοτίβο της τριαδικής θεότητας το συναντάμε σε όλες τις θρησκείες και τα εσωτερικά συστήματα ανά τους πολιτισμούς. Ο λόγος, η μονάδα, το πνεύμα που διαποτίζεται από ζωή, αγάπη και ενέργεια και καταλήγει στη δημιουργία.

Ο ιερός αριθμός **4** έρχεται να κλείσει, να ολοκληρώσει το τετράγωνο, φτιάχνοντας τον στέρεο κυβικό κόσμο. Οι Πυθαγόρειοι ορκίζονταν στην τετρακτύ, καθώς εξέφραζε για αυτούς ολόκληρο το σύμπαν και αποτελούσε την πηγή της αιώνιας φύσης.

Μέσα από την απίστευτη ηθική διαύγεια στην οποία μας οδηγούν τα Χρυσά Έπη του Πυθαγόρα, βλέπουμε ότι η Τετρακτύς αποτελούσε για εκείνους πηγή καθημερινής σοφίας και έμπνευσης. **Μέσα σε αυτήν είχαν βρει την αρμονία για να μπορέσουν να ζήσουν και να ενώσουν μια καθημερινή ζωή με μια κοσμική ζωή, εντάσσοντας τους εαυτούς τους στο σύνολο της φύσης, μη διαχωρίζοντας λοιπόν τον εαυτό τους από το συνολικό πανόραμα της εκδήλωσης.**

Το βαθύτερο μυστήριο ξεφεύγει από μια απλή καθημερινή ανθρώπινη σκέψη. Σύμφωνα με τον Θέωνα του Σμυρναίου λέγεται ότι υπάρχουν 11 διαφορετικές τετράδες οι οποίες έχουν διαφορετική σημασία μεταξύ τους, με τη θεμελιώδη να είναι αυτή που πρωτοαναφέρθηκε. Άλλη αποτελείται από τα τέσσερα στοιχεία της φύσης: γη, νερό, αέρας, φωτιά, ενώ μια ακόμα αποτελείται από γεωμετρικές προόδους με λόγο το 2 (1,2,4,8) και το 3 (1,3,9,27) αντίστοιχα.

Αναζητώντας την τετρακτύ...

Η τετρακτύς μέσα από το έργο του Λάο Τσε και τη σοφία της Ανατολής

«Το Ταό γέννησε το Ένα · το Ένα γέννησε τη δυαδικότητα · τα δύο γέννησαν την τριάδα· τα

τρία γέννησαν όλα όσα υπάρχουν.» Ταο Τε Τζινγκ

Τι είναι αυτή η τετρακτύς; Σύμφωνα με εξηγήσεις που δίνονται στο Ταο, αναφερόμαστε στην κοσμογονία, μια **κοσμογονία μέσω των ιερών αριθμών του Πυθαγόρα**. Το Ένα είναι ο αρχέγονος αιθέρας, ή αλλιώς το Όλον, το Ον, ο Θεός, ή όπως αλλιώς επιθυμεί ο καθένας, που διαχωρίστηκε στις δύο δημιουργικές αρχές γιν και γιανγκ (σκοτάδι και φως, αρσενικό και θηλυκό, θέρμη και ψύχος). Με την ένωση αυτών των δύο δημιουργήθηκε η Τριάδα και από αυτήν όλος ο κόσμος. Σε ένα ηθικό – φιλοσοφικό κλειδί ερμηνείας μέσα από το έργο του **Καζαντζάκη**

$0+1+2+3+4=10... 10$

«Ερχόμαστε από μια σκοτεινή άβυσσο· καταλήγουμε σε μια σκοτεινή άβυσσο· το μεταξύ φωτεινό διάστημα το λέμε Ζωή. Ευτύς ως γεννηθούμε, αρχίζει και η επιστροφή· ταυτόχρονα το ξεκίνημα και ο γυρισμός· κάθε στιγμή πεθαίνουμε. Γι' αυτό πολλοί διαλάλησαν σκοπός της ζωής είναι ο θάνατος.

Μα κι ευτύς ως γεννηθούμε, αρχίζει και η προσπάθεια να δημιουργήσουμε, να συνθέσουμε, να κάμουμε την ύλη ζωή· κάθε στιγμή γεννιόμαστε. Γι' αυτό πολλοί διαλάλησαν: Σκοπός της εφήμερης ζωής είναι η αθανασία.» Ασκητική

Έτσι ξεκινάει η ασκητική του Καζαντζάκη... Μέσα από αυτό το μυστήριο, μέσα από το νόμο των κύκλων· το σημείο που δημιουργεί τη ζωή και επιστρέφει πάλι στον εαυτό του. Η τετρακτύς που εκδηλώνεται και έχει μέσα της κρυμμένη τη ζωή, την εκδήλωση, και τη επιστροφή. Όπως ένα άστρο... ξεκινάει από ύλη σε λανθάνουσα κατάσταση σε μορφή αστροσκοπής, συνεχίζει σε έναν πρωτοαστέρα μέχρι εξελικτικά να καταλήξει πάλι σε μια έκρηξη-θάνατο και επιστροφή στην αρχική κατάσταση.

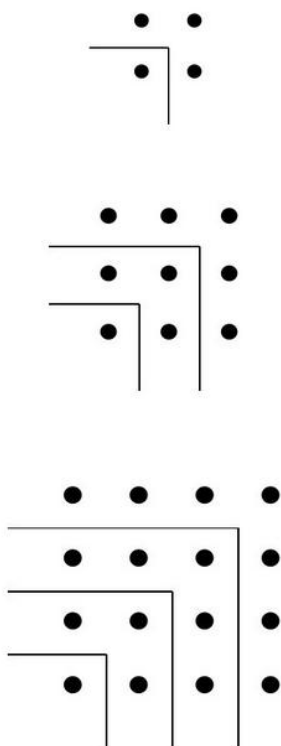
Ας αναζητήσουμε λοιπόν αυτό το υπέροχο μυστήριο της ύπαρξης που λέγεται ζωή... που λέγεται θάνατος...

Συνέχεια στους παραστατικούς αριθμούς

Με άλλα λόγια, λοιπόν, οι τρεις διαστάσεις του χώρου έχουν αντιστοιχία σε αριθμούς. Εφ' όσον τα πάντα είναι αριθμός, μπορεί να αποδειχθεί ότι ο χώρος έχει αριθμητική δομή, αρκεί να εξομοιωθούν οι αριθμοί με γεωμετρικά σημεία. Παραθέτουμε μερικά παραδείγματα:

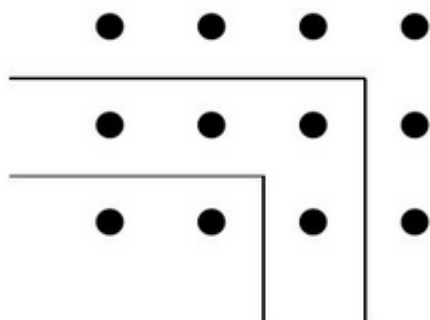
Αν στον αριθμό 1, δηλαδή σε μια κουκκίδα ή σε ένα πετραδάκι ή ένα κρύσταλλο, προσθέσουμε 3 κουκκίδες, έχουμε 4 κουκκίδες και έχει σχηματιστεί ένα τετράγωνο. Αν συνεχίσουμε να προσθέτουμε 5 κουκκίδες θα πάρουμε πάλι ένα τετράγωνο με σύνολο

αριθμών κουκίδων 9, δηλαδή το 3 στο τετράγωνο.



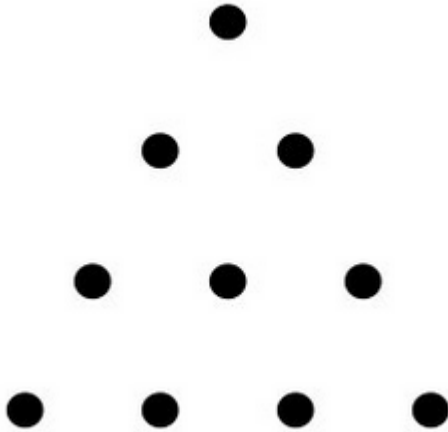
Με βάση τα παραπάνω οι Πυθαγόρειοι «μας λένε» πως το άθροισμα περιττών αριθμών είναι ένας αριθμός που έχει σχήμα τετραγώνου, «τετράγωνος» αριθμός όπως τον λέγανε. Εμείς σήμερα γράφουμε $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Ας πάρουμε ένα άλλο παράδειγμα, το άθροισμα αρτίων αριθμών: Αν στον αριθμό 2, δηλαδή σε δυο κουκκίδες, προστεθούν 4, παίρνουμε 6 κουκκίδες, και σχηματικά ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Αν συνεχιστεί με την πρόσθεση του 6 το ορθογώνιο επεκτείνεται.



Με άλλα λόγια, οι Πυθαγόρειοι «μας λένε» ότι το άθροισμα αρτίων αριθμών, $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$ είναι ένας αριθμός που έχει σχήμα ορθογώνιου, ένας «ετερομήκης» αριθμός κατά τους Πυθαγόρειους.

Ένα άλλο παράδειγμα είναι το άθροισμα **αρτίων και περιττών** αριθμών. Αν προσθέσουμε άρτιους και περιττούς κατά αύξουσα σειρά, δηλαδή $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$ σχηματίζουμε ένα ισοσκελές τρίγωνο, τους επονομαζόμενους «τρίγωνους» αριθμούς, που δίνουν άθροισμα $1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n+1)/2$.



Αφού ο χώρος εξομοιώθηκε με αριθμούς, περνάμε στις ιδιότητες του γεωμετρικού χώρου.

Τι γνώριζαν ο Πυθαγόρας και οι Πυθαγόρειοι για τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων

Μπορούμε να συγκεφαλαιώσουμε ως εξής τις ανακαλύψεις των Πυθαγορείων στη γεωμετρία:

- Το σημείο είναι μία μονάδα που ορίζεται από έναν προσδιορισμό θέσης.
- Το σημείο είναι ανάλογο προς τη Μονάδα, η γραμμή προς τη Διάδα, η επιφάνεια προς την Τριάδα, το στερεό προς την Τετράδα.
- Πρώτοι οι Πυθαγόρειοι απέδειξαν το θεώρημα σύμφωνα με το οποίο οι εσωτερικές γωνίες κάθε τριγώνου είναι ίσες με δύο ορθές.
- Οι Πυθαγόρειοι ήξεραν να κατασκευάζουν το πεντάγραμμο, που σχηματίζεται από τρία αλληλοεμπλεκόμενα τρίγωνα.
- Ο Πυθαγόρας ήξερε να κατασκευάζει ένα σχήμα ισοδύναμο προς δεδομένο σχήμα.
- Οι Πυθαγόρειοι είχαν ανακαλύψει την παραβολή των επιφανειών των σχημάτων, την υπερβολή και την έλλειψή τους.
- Οι Πυθαγόρειοι είχαν μάταια πασχίσει να λύσουν το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου.
- Πιστεύεται ότι οι Πυθαγόρειοι είναι εκείνοι που απέδειξαν ότι τα πέντε κανονικά πολύεδρα, που αποδίδονται στα κοσμικά στοιχεία, είναι εγγράψιμα στη σφαίρα.

Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη, οι Πυθαγόρειοι απέδειξαν την ασυμμετρία της διαγωνίου του τετραγώνου, δηλαδή το πρώτο άρρητο μέγεθος $\sqrt{2}$. Η ανακάλυψη αυτή αποτέλεσε σκάνδαλο για τους Πυθαγορείους, δεδομένου ότι η ύπαρξη της $\sqrt{2}$ τίναζε στον αέρα την αριθμητική αντίληψη του χώρου την οποία είχαν: δεν είναι δυνατόν να βρεθεί αριθμός ίσος προς $\sqrt{2}$, άρα να παρουσιαστεί το μέγεθος αυτό με σημεία, μπορεί όμως να παρασταθεί με ένα μήκος, το μήκος της διαγωνίου ενός τετραγώνου η πλευρά του οποίου είναι η μονάδα μέτρου. Στην ασυμμετρία θα επανέλθουμε παρακάτω.

- Κατά τα λεγόμενα του Αριστοτέλη, η σχολή του Πυθαγόρα κατάρτισε έναν πίνακα 10 αντιθέτων:

ἕτεροι δὲ τῶν αὐτῶν τούτων τὰς ἀρχὰς δέκα λέγουσιν εἶναι
 τὰς κατὰ συστοίχiam λεγομένας, πέρας [καὶ] ἄπειρον, περιτ-
 τὸν [καὶ] ἄρτιον, ἐν [καὶ] πλῆθος, δεξιὸν [καὶ] ἀριστερόν, ἄρρεν
 [καὶ] θῆλυ, ἡρεμοῦν [καὶ] κινούμενον, εὐθύ [καὶ] καμπύλον, φῶς
 [καὶ] σκότος, ἀγαθόν [καὶ] κακόν, τετράγωνον [καὶ] ἑτερόμηκες· (Μ.τ.φ. 986 α 22).

- **Ο «πίνακας των 10 αντιθέτων» που παραθέτει ο Αριστοτέλης:**

πέρας	↔	άπειρον
περιττόν	↔	άρτιον
εν	↔	πλήθος
δεξιόν	↔	αριστερόν
άρρεν	↔	θήλυ
ηρεμούν	↔	κινούμενον
ευθύ	↔	καμπύλον
φως	↔	σκότος
αγαθόν	↔	κακόν
τετράγωνον	↔	ετερόμηκες

Ο Αριστοτέλης αποδίδει αυτόν τον πίνακα στον Αλκμαίωνα, χωρίς να μπορεί να πει αν ο Αλκμαίων τον δανείστηκε από τους Πυθαγορείους ή οι Πυθαγόρειοι από τον Αλκμαίωνα, ή απλώς αν ο Αλκμαίων ήταν κι αυτός Πυθαγόρειος. Το γεγονός πάντως είναι ότι ο πίνακας καταφάσκει και πάλι στην πρόταση ότι «τα αντίθετα είναι οι αρχές των όντων».

Πυθαγόρας και Πυθαγόρειο Θεώρημα

Πιστεύεται ότι ο Πυθαγόρας ανακάλυψε το περιβόητο θεώρημα, το «πυθαγόρειο», που επίσης αποκαλείται «θεώρημα των τριών τετραγωνικών». Σύμφωνα με την παράδοση, ο Πυθαγόρας γιόρτασε την ανακάλυψή του θυσιάζοντας βόδια προς τιμήν των Μουσών.

Πάμπολλες είναι οι αναφορές, ότι ο Πυθαγόρας απέδειξε το γνωστό θεώρημα. Επίσης είναι πολύ συχνή η αναφορά ότι ο Πυθαγόρας ανακάλυψε το πυθαγόρειο θεώρημα. Που τελειώνει ο μύθος, που αρχίζει η ιστορική αλήθεια; Που μας οδηγούν οι πηγές;

Αυτό που σίγουρα γνωρίζουμε από πηγές είναι ότι οι Αιγύπτιοι έκαναν εμπειρική χρήση αυτής της σχέσης σε κάθε τρίγωνο ξεχωριστά, χωρίς να υπάρχει από μεριάς τους μια γενική διατύπωση έστω και σε πρωταρχική μορφή, κάτι που οδηγεί αναπόφευκτα στο συμπέρασμα ότι δεν είχαν διαμορφώσει την γεωμετρική έννοια του τριγώνου και πολύ περισσότερο την έννοια της ιδιότητας ενός τριγώνου. Γνωρίζουμε επίσης για τους Βαβυλώνιους, ότι έκαναν συνεχή εφαρμογή της σχέσης σε μεμονωμένα ορθογώνια τρίγωνα. Την πρώτη μαθηματική απόδειξη της ιδιότητας βρίσκουμε στα ΣΤΟΙΧΕΙΑ του Ευκλείδη γύρω στο 300 π.Χ., στην πρόταση 47 του 1^{ου} βιβλίου, πρότασης που έχει συνδεθεί με τον Πυθαγόρα και αναφέρεται ως Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Για τη σύνδεση του Πυθαγόρα με το σχετικό θεώρημα υπάρχουν πολλές αναφορές από των αρχαιολογικών χρόνων. Ας τις δούμε:

Ξεκινάμε με τον Κικέρωνα τον 1^ο αιώνα π.Χ.

Ο Κικέρωνας αναφέρεται σε μια ιστορία που γνωρίζει σύμφωνα με την οποία ο Πυθαγόρας έκανε μια ανακάλυψη στη γεωμετρία, χωρίς να λέει ποια είναι αυτή. Δεν τη γνωρίζει; Είναι κάτι αυτονόητο που δεν χρειάζεται να το αναφέρει; Από τις αναφορές που θα ακολουθήσουν, μάλλον δεν είναι ξεκάθαρο. Επιπλέον δεν θεωρεί ότι ο Πυθαγόρας έκανε θυσία μετά από αυτήν την ανακάλυψη.

«Είναι αλήθεια ότι υπάρχει μια ιστορία κατά την οποία ο Πυθαγόρας θυσίασε ένα βόδι προς τιμήν των Μουσών, όταν έκανε μια νέα ανακάλυψη στη γεωμετρία. Αλλά εγώ δεν την πιστεύω, επειδή (ο Πυθαγόρας) αρνούνταν να προβεί σε θυσία, ακόμα και χάριν του Δήλιου Απόλλωνα, για να μην πασπαλιστεί με αίμα ο βωμός.»

Η μαρτυρία του Βιτρούβιου τον 1^ο αιώνα π.Χ. είναι πιο συγκεκριμένη:

«Ο Πυθαγόρας επέδειξε τη μέθοδο κατασκευής ορθογωνίου τριγώνου,

χωρίς τη χρήση εργαλείων που κατέχουν οι τεχνίτες. Αυτό που εκείνοι μόλις καταφέρνουν να πετύχουν, ακόμη και με μεγάλο κόπο, μπορεί να γίνει πολύ εύκολα με τους κανόνες του. Ας παρθούν τρεις ράβδοι, μία ίση με τρία πόδια, μία με τέσσερα και μία με πέντε. Και ας ενωθούν, έτσι ώστε το άκρο της κάθε μίας να αγγίζει αυτό της άλλης. Τότε θα σχηματίσουν ένα τρίγωνο, του οποίου μία γωνία είναι ορθή. Και αν σχεδιαστούν τρία τετράγωνα που να έχουν πλευρά την κάθε ράβδο, τότε αυτό των τριών ποδιών θα έχει έκταση εννέα πόδια, των τεσσάρων δεκαέξι και των πέντε είκοσι πέντε. Ωστε, αν οι αριθμοί των ποδιών, τα περιέχοντα στα τετράγωνα των τριών και τεσσάρων προστεθούν, θα ισούνται με αυτόν των ποδιών, τα περιέχοντα στο τετράγωνο των πέντε. Όταν ο Πυθαγόρας ανακάλυψε ετούτο το δεδομένο, δεν είχε την παραμικρή αμφιβολία ότι τον βοήθησαν οι Μούσες, γι' αυτό και εξέφρασε την ευγνωμοσύνη του προς εκείνες με μια θυσία. Αυτή η πρόταση είναι χρήσιμη σε πολλές περιπτώσεις, ιδιαίτερα στη μέτρηση, και όχι λιγότερο στην κατασκευή κτηριακών σκαλών, έτσι ώστε κάθε σκαλοπάτι να έχει το σωστό ύψος.»

Σύμφωνα με τον Βιτρούβιο η κατασκευή που έκανε ο Πυθαγόρας και η οποία αποτέλεσε αφορμή για θυσία, αφορά την κατασκευή ενός ορθογωνίου τριγώνου με πλευρές 3, 4 και 5 πόδια με τα τετράγωνα στις πλευρές αυτών και τη σχέση που προκύπτει μεταξύ τους. Αυτό το χαρακτηρίζει ως ανακάλυψη γιατί σε αντίθεση με τους τεχνίτες που το κάνουν με εργαλεία, αυτός το έκανε με κανόνες. Φαίνεται ο Βιτρούβιος να αναφέρεται σε θεωρητικούς κανόνες.

Στον Πλούταρχο (1^ο-2^ο αιώνα μ.Χ.) βρίσκουμε την παρακάτω αναφορά:

«... και ο Πυθαγόρας θυσίασε ένα βόδι λόγω των σχημάτων του, όπως λέει ο Απολλόδωρος όταν ο Ήρως βρήκε το περίφημο σχήμα, προχώρησε σε λαμπρή θυσία,' είτε αυτό ήταν το περί του τετραγώνου της υποτείνουσας (κάθε

ορθογωνίου τριγώνου) που ισούται με αυτά
(των πλευρών) οι οποίες περιέχουν την
ορθή (γωνία), είτε το πρόβλημα που αφορά
την παραβολή χωρίων.»

Ο Πλούταρχος παραπέμπει στον Απολλόδωρο για την κατασκευή του Πυθαγόρα, αλλά δεν είναι σίγουρος για το αν η κατασκευή αφορούσε τη σχέση στο ορθογώνιο τρίγωνο ή το πρόβλημα της παραβολής χωρίων. Σε άλλο κείμενό του αναφέρει:

«Διότι μεταξύ των σημαντικότερων γεωμετρικών
θεωρημάτων, μάλλον δε προβλημάτων, είναι το εξής:
δοθέντων δύο (σχημάτων), να παρεμβληθεί ένα τρίτο
που να είναι ίσο με το πρώτο και όμοιο με το
δεύτερο. Λέγεται ότι εξαιτίας αυτής της ανακάλυψης,
ο Πυθαγόρας προχώρησε σε θυσία· διότι αυτό είναι
γλαφυρότερο και μουσικότερο του θεωρήματος που
επίσης απέδειξε και που αφορά την ισότητα του
τετραγώνου της υποτείνουσας (κάθε ορθογωνίου
τριγώνου) με αυτά (των πλευρών) που περιέχουν την
ορθή γωνία.»

Σε αυτό το κομμάτι γίνεται ξεκάθαρη αναφορά σε γεωμετρικό θεώρημα. Ο Πλούταρχος φαίνεται πιο σίγουρος και ισχυρίζεται ότι αφορμή για την θυσία αποτέλεσε η επίλυση του προβλήματος της παραβολής. Ισχυρίζεται επίσης ότι ο Πυθαγόρας απέδειξε και τη σχέση στο ορθογώνιο τρίγωνο. Συνεπώς σύμφωνα με τον Πλούταρχο ο Πυθαγόρας απέδειξε τόσο το θεώρημα στα ορθογώνια τρίγωνα όσο και το πρόβλημα της παραβολής.

Και ο Αθηναίος (2^ο-3^ο αιώνα μ.Χ.) παραπέμπει στον Απολλόδωρο αλλά θεωρεί ότι αφορμή για τη θυσία είναι η κατασκευή των τετραγώνων στις πλευρές του ορθογώνιου τριγώνου και η ισότητα του τετραγώνου της υποτείνουσας με το άθροισμα των άλλων δύο:

«Ο Απολλόδωρος δε ο αριθμητικός λέει ότι (ο Πυθαγόρας) προέβη σε θυσία εκατόμβης όταν βρήκε πως σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της υποτείνουσας είναι ίσο προς αυτά (των πλευρών) που περιέχουν την ορθή γωνία· όταν ο ξακουστός Πυθαγόρας βρήκε το περίφημο σχήμα, προχώρησε στη γνωστή θυσία βοδιού.»

Το ίδιο ακριβώς χωρίο το βρίσκουμε στο Διογένη Λαερτίου τον 3^ο αιώνα μ.Χ.

«Ο Απολλόδωρος δε ο λογιστικός λέει ότι (ο Πυθαγόρας) προέβη σε θυσία εκατόμβης, όταν βρήκε πως σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της υποτείνουσας είναι ίσο προς αυτά (των πλευρών) που περιέχουν (την ορθή γωνία). Και υπάρχει το εξής επίγραμμα: όταν ο ξακουστός Πυθαγόρας βρήκε το περίφημο σχήμα, προχώρησε στη γνωστή θυσία βοδιού.»

Απ' όλες αυτές τις μαρτυρίες, φαίνεται ότι το έργο των συγγραφέων ήταν πολύ δύσκολο αφού είχαν να συσχετίσουν ένα τόσο σημαντικό θεώρημα με τον Πυθαγόρα, χωρίς όμως να έχουν επαρκείς πληροφορίες. Όλα σχεδόν τα κείμενα είναι βασισμένα στα λεγόμενα του Απολλοδώρου, ο οποίος αν είναι ο Απολλόδωρος ο Κυζικηνός (4^{ος} αιώνας π.Χ.), τότε η ιστορία έχει προεुकλείδειες ρίζες. Επίσης, οι συγγραφείς έπρεπε να αντιμετωπίσουν το θέμα της θυσίας, γεγονός που φάνταζε αδιανόητο, αφού ερχόταν σε αντίθεση τόσο με τις διατροφικές συνήθειες της σχολής της οποίας ήταν ιδρυτής ο Πυθαγόρας, όσο και της πάγιας τακτικής που ακολουθούσε ο Πυθαγόρας, δηλαδή, να μην θανατώνει ζώα.

Οι τετραγωνισμοί των μηνίσκων του Ιπποκράτη του Χίου (470–410 π.Χ.), που χρησιμοποιεί στις αποδείξεις του ρητά διατυπωμένο ή εμμέσως εννοούμενο, το Πυθαγόρειο θεώρημα, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι γύρω στο 430 π.Χ., δηλαδή την εποχή της ακμής του Ιπποκράτη του Χίου, η γνώση του Πυθαγόρειου θεωρήματος είναι αναμφισβήτητη.

Οι πηγές αυτές που εξετάστηκαν δεν μπορούν να μας δώσουν ξεκάθαρη εικόνα για το ποιος ήταν αυτός που απέδειξε πρώτος το λεγόμενο Πυθαγόρειο Θεώρημα. Σύμφωνα με την προηγηθείσα ανάλυση, εκτιμάται ότι η αυθεντική απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος προήλθε από τον κύκλο των Πυθαγορείων, κάπου ανάμεσα στα 450 και 430 π.Χ.

FUNFACTS

Το μυστήριο με τα φασόλια

Ο πιο διάσημος και παράξενος κανόνας των Πυθαγορείων ήταν ότι απαγορευόταν να τρώνε φασόλια.

Δεν γνωρίζουμε ακριβώς τον λόγο, αλλά υπάρχουν διάφορες θεωρίες:

- Κάποιοι πίστευαν ότι οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν τα φασόλια ιερά, επειδή πίστευαν ότι μέσα τους μπορούσαν να κατοικούν ψυχές νεκρών.
- Άλλοι λένε ότι το σχήμα του φυτού τους θύμιζε την ανθρώπινη ζωή ή τη γέννηση, οπότε το συνέδεαν με τη μετενσάρκωση.
- Μια πιο πρακτική εξήγηση είναι ότι τα φασόλια προκαλούν έντονη ζύμωση και αέρια, κάτι που θεωρούσαν ότι επηρεάζει την καθαρότητα του σώματος και του νου.

Υπάρχει μάλιστα ένας μύθος ότι όταν ο Πυθαγόρας κυνηγήθηκε από εχθρούς, βρέθηκε μπροστά σε ένα χωράφι με φασόλια. Αντί να περάσει μέσα από το χωράφι, σταμάτησε επειδή δεν ήθελε να τα πατήσει — και έτσι τον έπιασαν.

Η απαγόρευση να σπας το ψωμί

Ένας άλλος περίεργος κανόνας ήταν ότι οι Πυθαγόρειοι δεν έπρεπε να σπάνε το ψωμί σε κομμάτια.

Ο λόγος πιθανότατα ήταν συμβολικός. Το ψωμί θεωρούνταν σύμβολο ενότητας και κοινότητας, και το σπάσιμό του θεωρούσαν ότι διασπά την αρμονία.

Για μια σχολή που πίστευε ότι το σύμπαν βασίζεται στην αρμονία και στους αριθμούς, τέτοιοι συμβολισμοί είχαν μεγάλη σημασία.

Η σιωπή των νέων μαθητών

Οι νέοι μαθητές της πυθαγόρειας σχολής έπρεπε να περάσουν μια πολύ παράξενη δοκιμασία: να μην μιλούν για αρκετά χρόνια.

Σύμφωνα με κάποιες πηγές, η περίοδος αυτή μπορούσε να φτάσει ακόμη και τα πέντε χρόνια. Κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου οι μαθητές απλώς άκουγαν και μάθαιναν χωρίς να κάνουν ερωτήσεις. Ο στόχος ήταν να μάθουν πρώτα να σκέφτονται και να ακούν προσεκτικά, πριν εκφράσουν άποψη.

Οι Πυθαγόρειοι ήταν οι πρώτοι... vegetarian φιλόσοφοι

Οι μαθητές του Pythagoras συχνά απέφευγαν να τρώνε κρέας. Ο λόγος ήταν η πίστη τους στη μετενσάρκωση της ψυχής. Πίστευαν ότι η ψυχή ενός ανθρώπου μπορούσε μετά τον θάνατο να περάσει σε κάποιο ζώο. Υπάρχει μάλιστα μια ιστορία ότι ο Πυθαγόρας κάποτε είδε κάποιον να χτυπά έναν σκύλο και είπε:

«Σταμάτα! Αναγνωρίζω τη φωνή ενός φίλου μου μέσα σε αυτόν.»

Δηλαδή πίστευε ότι η ψυχή ενός ανθρώπου είχε μεταφερθεί στο ζώο.

Ο Πυθαγόρας δεν έγραψε κανένα βιβλίο

Παρότι είναι ένας από τους πιο γνωστούς μαθηματικούς της ιστορίας, ο Πυθαγόρας δεν άφησε κανένα γραπτό έργο. Όσα ξέρουμε για αυτόν προέρχονται από μαθητές του και από μεταγενέστερους συγγραφείς.

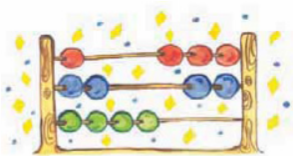
Οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι η Γη είναι σφαίρα

Σε μια εποχή που πολλοί φαντάζονταν τη Γη επίπεδη, οι Πυθαγόρειοι υποστήριξαν ότι η Γη έχει σφαιρικό σχήμα, μια ιδέα που αργότερα θα γίνει βασική στην αστρονομία.

Η μουσική αποδείχθηκε ότι είναι μαθηματικά

Οι Πυθαγόρειοι ανακάλυψαν ότι οι αρμονικοί ήχοι δημιουργούνται από απλές αριθμητικές αναλογίες στις χορδές. Αυτή ήταν η πρώτη φορά που αποδείχθηκε ότι ένα καλλιτεχνικό φαινόμενο (η μουσική) μπορεί να εξηγηθεί με μαθηματικά.

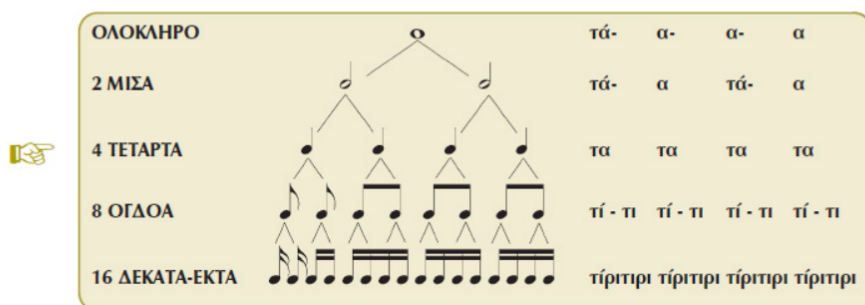
Οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι αν μπορούσαμε να ακούσουμε το σύμπαν, θα ακούγαμε... μουσική φτιαγμένη από μαθηματικά.



Θα έχεις, ίσως, ακούσει ότι η μουσική έχει σχέση με τα Μαθηματικά. Μαθαίνοντας, για παράδειγμα, τις «αξίες», δηλαδή τις διάρκειες των μουσικών φθόγγων, εξασκείς παράλληλα και τη μαθηματική σου σκέψη. Στο σημερινό μάθημα, λοιπόν, θα ασχοληθούμε με τα ... Μαθηματικά μ' έναν ευχάριστο και «ρυθμικό» τρόπο.

Οι αξίες των φθογγόσημων

Τα **φθογγόσημα** είναι σύμβολα με τα οποία παριστάνουμε τους μουσικούς φθόγγους. Αν τοποθετήσουμε τα φθογγόσημα σ' έναν πίνακα αρχίζοντας από το **ολόκληρο**, που διαρκεί 4 χτύπους ή «χρόνους», δηλαδή 4 τέταρτα (♩), θα έχουμε τις ακόλουθες υποδιαίρεσεις και τα **αντίστοιχα ρυθμικά ονόματα**:



Όταν χτυπάς το χέρι σου στο θρανίο στο ρυθμό ενός **εμβατηρίου***, «μετράς» **τέταρτα**. Κάθε **τέταρτο** (♩) αντιστοιχεί σ' **ένα χτύπο**, «**βήμα**» ή «**χρόνο**». Όταν κάνεις παρέλαση, κάθε **βήμα** που κάνεις αντιπροσωπεύει ένα τέταρτο.

Στη μουσική δε «μετράμε» μόνο τις διάρκειες των ήχων, αλλά και τις σιωπές, δηλαδή τις **παύσεις**:

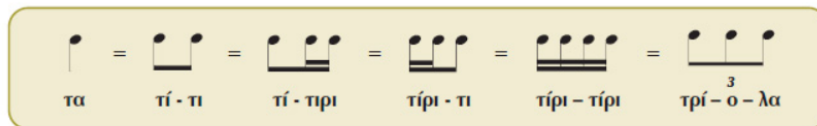
♩	=	Παύση Ολοκλήρου (διαρκεί 4 χρόνους / χτύπους)
♪	=	Παύση Μισού (διαρκεί 2 χρόνους / χτύπους)
♫	=	Παύση Τετάρτου (διαρκεί 1 χρόνο / χτύπο)
♬	=	Παύση Ογδού (διαρκεί 1/2 του χρόνου / χτύπου)
♭	=	Παύση Δεκάτου – έκτου (διαρκεί 1/4 του χρόνου / χτύπου)

Τα Μαθηματικά... της μουσικής!

Δοκίμασε να «απαγγείλεις» τα ρυθμικά ονόματα των φθογγόσημων κάνοντας βήματα επιτόπου (κάθε βήμα = 1 τέταρτο). Τι συμβαίνει όσο προχωράς προς το κάτω μέρος του πίνακα;

Μπορείς να αποδώσεις τον πίνακα υποδιαιρέσεων των αξιών με κλάσματα ή με σχήματα;

Ένας χρόνος (χτύπος), λοιπόν, μπορεί να περιέχει ένα τέταρτο ή συνδυασμούς από μικρότερες αξίες ή παύσεις π.χ.:



Ο τελευταίος από τους συνδυασμούς αξιών που βλέπεις

ονομάζεται **τρίηχο**.

3. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο GPS: 2.500 χρόνια μαθηματικής εξέλιξης

Εισαγωγή- Σύνδεση με τα προηγούμενα

Όταν ο Πυθαγόρας έλεγε ότι "τα πάντα είναι αριθμός", οι περισσότεροι πιθανότατα θα τον θεωρούσαν υπερβολικό. Σήμερα όμως, η τοποθεσία μας στο GPS, οι τραπεζικές συναλλαγές μας, το Instagram, το TikTok και το Wi-Fi λειτουργούν επειδή κάποιος περιγράφει τον κόσμο με αριθμούς. Ίσως τελικά ο Πυθαγόρας να είχε περισσότερο δίκιο απ' όσο φανταζόταν!

Μέχρι τώρα είδαμε πώς γεννήθηκε η μαθηματική σκέψη στον αρχαίο κόσμο. Οι λαοί της Μεσοποταμίας και οι Ασύριοι ανέπτυξαν τα πρώτα αριθμητικά συστήματα και χρησιμοποίησαν τα μαθηματικά για πρακτικές ανάγκες, όπως η γεωργία, το εμπόριο και η αστρονομία. Στη συνέχεια, οι Προπυθαγόρειοι φιλόσοφοι, με σημαντικότερο εκπρόσωπο τον Θαλή τον Μιλήσιο, έκαναν ένα καθοριστικό βήμα: προσπάθησαν να εξηγήσουν τον κόσμο με τη λογική και την παρατήρηση αντί για μύθους.

Ο Θαλής χρησιμοποίησε τη γεωμετρία για να υπολογίσει το ύψος των πυραμίδων, προέβλεψε μια ηλιακή έκλειψη και θεωρείται από πολλούς ο πρώτος που εισήγαγε την έννοια της μαθηματικής απόδειξης. Οι μαθητές και οι διάδοχοί του, όπως ο Αναξίμανδρος και ο Αναξίμανδρος, τόλμησαν να διατυπώσουν ιδέες που έμοιαζαν επαναστατικές για την εποχή τους, όπως ότι η γη αιωρείται στο διάστημα ή ότι η ζωή εξελίχθηκε από απλούστερες μορφές.

Πάνω σε αυτά τα θεμέλια εμφανίστηκαν οι Πυθαγόρειοι. Σε αντίθεση με τους Προπυθαγορείους, που χρησιμοποιούσαν τα μαθηματικά κυρίως για να κατανοήσουν και να περιγράψουν τη φύση, οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι οι αριθμοί αποτελούν την ίδια τη δομή της πραγματικότητας. Μελέτησαν τις ιδιότητες των αριθμών, ανέπτυξαν το Πυθαγόρειο Θεώρημα, ανακάλυψαν τη μαθηματική βάση της μουσικής και υποστήριξαν ότι το σύμπαν διέπεται από αρμονία και μαθηματικές σχέσεις.

Όμως, η ιστορία των μαθηματικών δεν σταμάτησε στην αρχαία Ελλάδα. Αντίθετα, οι ιδέες αυτές αποτέλεσαν τη βάση για τη μετέπειτα επιστημονική επανάσταση. Το ερώτημα που προκύπτει είναι το εξής: **αν οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι το σύμπαν είναι γραμμένο στη γλώσσα των αριθμών, πώς αποδείχθηκε αυτό στην πράξη;**

Η απάντηση θα δοθεί πολλούς αιώνες αργότερα από επιστήμονες όπως ο Γαλιλαίος, ο οποίος χρησιμοποίησε τα μαθηματικά για να περιγράψει τους νόμους της φύσης. Και ακόμη πιο εντυπωσιακά, οι ίδιες μαθηματικές αρχές που ξεκίνησαν από τη γεωμετρία της αρχαιότητας βρίσκονται σήμερα πίσω από τεχνολογίες που χρησιμοποιούμε καθημερινά, όπως το GPS στα κινητά μας τηλέφωνα.

Γαλιλαίος: Ο άνθρωπος που απέδειξε ότι η φύση μιλάει τη γλώσσα των μαθηματικών

Ο GalileoGalilei γεννήθηκε το 1564 στην Πίζα της Ιταλίας και θεωρείται ένας από τους θεμελιωτές της σύγχρονης επιστήμης. Σε αντίθεση με πολλούς μελετητές της εποχής του, δεν αρκούνταν στις θεωρίες και στις παραδόσεις. Πίστευε ότι, για να κατανοήσει κανείς τη φύση, πρέπει να παρατηρεί, να πειραματίζεται και να μετρά.

Αυτό που έκανε τον Γαλιλαίο ξεχωριστό ήταν ότι συνδύασε τα πειράματα με τα μαθηματικά. Μελέτησε την κίνηση των σωμάτων, την πτώση των αντικειμένων και τις τροχιές των βλημάτων και προσπάθησε να περιγράψει όλα αυτά τα φαινόμενα με μαθηματικές σχέσεις. Για πρώτη φορά στην ιστορία, η φύση δεν αντιμετωπιζόταν απλώς ως αντικείμενο φιλοσοφικής σκέψης, αλλά ως κάτι που μπορούσε να μετρηθεί και να περιγραφεί με ακρίβεια.

Μία από τις πιο γνωστές ιστορίες για τον Γαλιλαίο συνδέεται με τον Πύργο της Πίζας. Σύμφωνα με την παράδοση, άφησε δύο αντικείμενα διαφορετικού βάρους να πέσουν από τον πύργο για να δείξει ότι φτάνουν στο έδαφος σχεδόν ταυτόχρονα. Αν και οι ιστορικοί δεν είναι βέβαιοι αν το πείραμα πραγματοποιήθηκε ακριβώς με αυτόν τον τρόπο, είναι βέβαιο ότι ο Γαλιλαίος απέδειξε μέσω πειραμάτων ότι η πτώση των σωμάτων δεν εξαρτάται από το βάρος τους όπως πίστευαν πολλοί μέχρι τότε.

Παράλληλα, ο Γαλιλαίος κατασκεύασε βελτιωμένα τηλεσκόπια και στρέφοντάς τα προς τον ουρανό έκανε ανακαλύψεις που άλλαξαν την εικόνα που είχαν οι άνθρωποι για το σύμπαν. Παρατήρησε βουνά στη Σελήνη, ηλιακές κηλίδες και τους τέσσερις μεγαλύτερους δορυφόρους του πλανήτη Δία. Οι παρατηρήσεις αυτές ενίσχυσαν την άποψη ότι η Γη δεν βρίσκεται στο κέντρο του σύμπαντος, μια ιδέα που ερχόταν σε σύγκρουση με τις κυρίαρχες αντιλήψεις της εποχής.

Η σημαντικότερη όμως κληρονομιά του δεν ήταν κάποια συγκεκριμένη ανακάλυψη. Ήταν η πεποίθησή του ότι η φύση μπορεί να περιγραφεί με μαθηματικά. Ο ίδιος έγραψε ότι «το βιβλίο της φύσης είναι γραμμένο στη γλώσσα των μαθηματικών». Η φράση αυτή θυμίζει έντονα τις απόψεις των Πυθαγορείων, οι οποίοι αιώνες νωρίτερα είχαν υποστηρίξει ότι οι αριθμοί κρύβονται πίσω από την αρμονία του κόσμου.

Με τον Γαλιλαίο, η πυθαγόρεια ιδέα ότι το σύμπαν διέπεται από μαθηματικούς νόμους έπαψε να είναι απλώς μια φιλοσοφική υπόθεση και μετατράπηκε σε επιστημονική μέθοδο. Από εκείνο το σημείο και μετά, τα μαθηματικά έγιναν το βασικό εργαλείο για την κατανόηση της φύσης, ανοίγοντας τον δρόμο για τη φυσική, την αστρονομία και τις τεχνολογίες που χρησιμοποιούμε σήμερα.

Η μαθηματικοποίηση της φύσης

Το έργο του Γαλιλαίου σηματοδότησε μια σημαντική αλλαγή στην ιστορία της επιστήμης. Μέχρι τότε, πολλοί φιλόσοφοι προσπαθούσαν να εξηγήσουν τα φυσικά φαινόμενα κυρίως μέσω της λογικής και της παρατήρησης. Ο Γαλιλαίος όμως εισήγαγε μια νέα προσέγγιση: τη χρήση των μαθηματικών ως εργαλείου για την περιγραφή και την πρόβλεψη της συμπεριφοράς της φύσης.

Η ιδέα αυτή είναι γνωστή ως **μαθηματικοποίηση της φύσης**. Σύμφωνα με αυτή, τα φυσικά φαινόμενα δεν συμβαίνουν τυχαία, αλλά ακολουθούν συγκεκριμένους νόμους που μπορούν να εκφραστούν με μαθηματικές σχέσεις. Έτσι, η κίνηση ενός σώματος, η τροχιά ενός πλανήτη ή η πτώση ενός αντικειμένου μπορούν να μελετηθούν, να υπολογιστούν και να προβλεφθούν.

Η αντίληψη αυτή αποτέλεσε μια φυσική συνέχεια των ιδεών των Πυθαγορείων. Οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι το σύμπαν διέπεται από αριθμούς και αρμονικές σχέσεις. Ο Γαλιλαίος και οι επιστήμονες που ακολούθησαν έδειξαν ότι οι ιδέες αυτές μπορούν να εφαρμοστούν στην πράξη και να χρησιμοποιηθούν για την κατανόηση του φυσικού κόσμου.

Χάρη στη μαθηματικοποίηση της φύσης, αναπτύχθηκαν σταδιακά η κλασική μηχανική, η αστρονομία και η φυσική. **Οι επιστήμονες μπορούσαν πλέον να προβλέπουν την κίνηση**

των πλανητών, να υπολογίζουν την ταχύτητα των σωμάτων και να περιγράφουν με ακρίβεια φαινόμενα που μέχρι τότε φαίνονταν ανεξήγητα.

Η εξέλιξη αυτή δεν επηρέασε μόνο την επιστήμη, αλλά και την καθημερινή ζωή των ανθρώπων. Οι σύγχρονες τεχνολογίες βασίζονται σε μαθηματικά μοντέλα που περιγράφουν τον κόσμο με ακρίβεια. **Από τις γέφυρες και τα αεροπλάνα μέχρι τους υπολογιστές και τα κινητά τηλέφωνα, όλα λειτουργούν χάρη σε μαθηματικούς νόμους που επιτρέπουν τον σχεδιασμό και τον έλεγχο πολύπλοκων συστημάτων.**

Ένα από τα πιο χαρακτηριστικά παραδείγματα εφαρμογής αυτής της ιδέας είναι το σύστημα **GPS**. Παρότι χρησιμοποιείται καθημερινά από εκατομμύρια ανθρώπους για τον εντοπισμό θέσης και την πλοήγηση, η λειτουργία του βασίζεται σε γεωμετρικές και μαθηματικές αρχές που έχουν τις ρίζες τους στην αρχαιότητα. Η κατανόηση αυτών των αρχών δείχνει με τον πιο εντυπωσιακό τρόπο πώς οι ιδέες των αρχαίων μαθηματικών εξακολουθούν να επηρεάζουν τη σύγχρονη τεχνολογία.

Από την αρχαία γεωμετρία στους δορυφόρους GPS

Ίσως το πιο εντυπωσιακό παράδειγμα της διαχρονικής αξίας των μαθηματικών είναι το σύστημα GPS (GlobalPositioningSystem), το οποίο χρησιμοποιούμε καθημερινά στα κινητά μας τηλέφωνα, στα αυτοκίνητα και στις εφαρμογές πλοήγησης. Αν και πρόκειται για μια σύγχρονη τεχνολογία που βασίζεται σε δορυφόρους και υπολογιστές, οι θεμελιώδεις αρχές της συνδέονται με μαθηματικές ιδέες που ξεκίνησαν πριν από χιλιάδες χρόνια.

Γύρω από τη Γη κινούνται πολλοί δορυφόροι, οι οποίοι εκπέμπουν συνεχώς σήματα. Το κινητό μας λαμβάνει αυτά τα σήματα και υπολογίζει πόσο χρόνο χρειάστηκαν για να φτάσουν από τον δορυφόρο στη συσκευή.

Επειδή το σήμα ταξιδεύει με γνωστή ταχύτητα, το κινητό μπορεί να υπολογίσει την απόστασή του από κάθε δορυφόρο. Αν γνωρίζουμε ότι βρισκόμαστε, για παράδειγμα, 20.000 χιλιόμετρα από έναν δορυφόρο, τότε η θέση μας μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε πάνω σε μια τεράστια νοητή σφαίρα γύρω από αυτόν.

Με έναν μόνο δορυφόρο δεν μπορούμε να βρούμε την ακριβή θέση μας. Με δύο δορυφόρους οι πιθανές θέσεις μειώνονται σημαντικά. Με τρεις και κυρίως με τέσσερις δορυφόρους, το σύστημα μπορεί να προσδιορίσει με πολύ μεγάλη ακρίβεια το ακριβές σημείο στο οποίο βρισκόμαστε.

Η διαδικασία αυτή βασίζεται στη γεωμετρία, στις αποστάσεις και στα τρίγωνα. Εδώ ακριβώς εμφανίζεται η σύνδεση με τους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς. Ο Θαλής χρησιμοποιούσε γεωμετρικές αναλογίες για να υπολογίσει το ύψος των πυραμίδων χωρίς να τις μετρήσει

άμεσα. Οι Πυθαγόρειοι μελέτησαν τις σχέσεις μεταξύ των πλευρών των τριγώνων και ανέπτυξαν το Πυθαγόρειο Θεώρημα, το οποίο αποτελεί μία από τις σημαντικότερες βάσεις της γεωμετρίας.

Αιώνες αργότερα, ο Γαλιλαίος έδειξε ότι τα μαθηματικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουν τη φύση και να προβλέψουν φυσικά φαινόμενα. Χάρη σε αυτή τη νοοτροπία, οι επιστήμονες μπόρεσαν να αναπτύξουν τεχνολογίες όπως οι δορυφόροι και τα συστήματα εντοπισμού θέσης.

Επομένως, κάθε φορά που χρησιμοποιούμε το GPS στο κινητό μας, αξιοποιούμε μια αλυσίδα γνώσης που ξεκινά από τη γεωμετρία του Θαλή, περνά από το Πυθαγόρειο Θεώρημα και τη μαθηματική σκέψη των Πυθαγορείων και φτάνει μέχρι τη σύγχρονη επιστήμη και τεχνολογία. Το GPS αποτελεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα του πώς οι μαθηματικές ιδέες της αρχαιότητας εξακολουθούν να επηρεάζουν την καθημερινή μας ζωή.

Έτσι, το GPS αποδεικνύει ότι τα μαθηματικά δεν αποτελούν μόνο ένα θεωρητικό πεδίο γνώσης, αλλά ένα εργαλείο που επηρεάζει άμεσα την καθημερινή ζωή. **Κάθε φορά που χρησιμοποιούμε μια εφαρμογή πλοήγησης στο κινητό μας, αξιοποιούμε στην πράξη μια μακρά αλυσίδα μαθηματικών ιδεών που ξεκινά από την αρχαιότητα και φτάνει μέχρι τη σύγχρονη εποχή.**

Σκεφτείτε και το εξής: όταν ο Θαλής μέτρησε το ύψος μιας πυραμίδας χρησιμοποιώντας μόνο τη σκιά της, έκανε ουσιαστικά το ίδιο πράγμα που κάνει σήμερα το GPS. Δεν μετράει απευθείας αυτό που θέλει να βρει. Χρησιμοποιεί γνωστές αποστάσεις και γεωμετρία για να υπολογίσει μια άγνωστη θέση.

Η διαχρονική αξία των μαθηματικών: από την αρχαιότητα στο σήμερα

Η πορεία των μαθηματικών από την αρχαιότητα μέχρι τη σύγχρονη εποχή δείχνει ότι οι μεγάλες ιδέες της ανθρώπινης σκέψης δεν χάνονται με το πέρασμα του χρόνου. Αντίθετα, εξελίσσονται, εμπλουτίζονται και βρίσκουν νέες εφαρμογές σε τομείς που οι πρώτοι μαθηματικοί δεν θα μπορούσαν ποτέ να φανταστούν.

Οι Μεσοποτάμιοι και οι Ασσύριοι ανέπτυξαν τις πρώτες αριθμητικές μεθόδους για πρακτικές ανάγκες. Ο Θαλής ο Μιλήσιος εισήγαγε τη λογική απόδειξη και τη γεωμετρική σκέψη, ενώ οι Πυθαγόρειοι υποστήριζαν ότι οι αριθμοί αποτελούν τη βάση της πραγματικότητας. Αιώνες αργότερα, ο Γαλιλαίος απέδειξε ότι τα μαθηματικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την περιγραφή και την κατανόηση των φυσικών φαινομένων, θέτοντας τα θεμέλια της σύγχρονης επιστήμης.

Σήμερα, τα μαθηματικά βρίσκονται παντού γύρω μας. Χρησιμοποιούνται στην τεχνολογία, στις τηλεπικοινωνίες, στην ιατρική, στις μεταφορές, στην οικονομία και στην εξερεύνηση του διαστήματος. Εφαρμογές που θεωρούμε δεδομένες, όπως το GPS, το διαδίκτυο, τα κινητά τηλέφωνα και η τεχνητή νοημοσύνη, βασίζονται σε πολύπλοκες μαθηματικές έννοιες και υπολογισμούς.

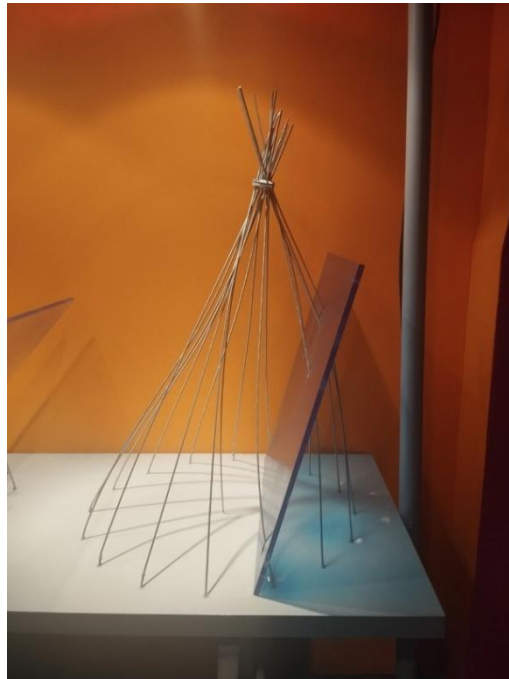
Το σημαντικότερο συμπέρασμα είναι ότι τα μαθηματικά δεν αποτελούν απλώς ένα σχολικό μάθημα ή ένα σύνολο τύπων και εξισώσεων. Είναι ένας τρόπος σκέψης που επιτρέπει στον άνθρωπο να παρατηρεί, να αναλύει, να προβλέπει και να κατανοεί τον κόσμο γύρω του. Από τις σκιές που χρησιμοποίησε ο Θαλής για να υπολογίσει το ύψος των πυραμίδων μέχρι τους δορυφόρους που καθορίζουν τη θέση μας στη Γη, η ίδια βασική ιδέα παραμένει αναλλοίωτη: η αναζήτηση γνώσης μέσα από τη λογική και τα μαθηματικά.

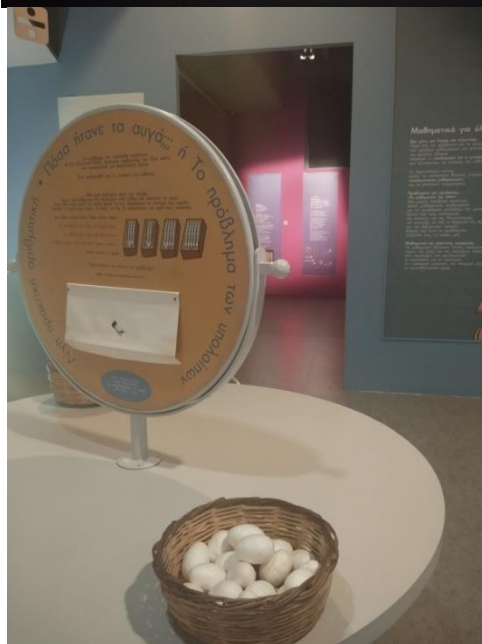
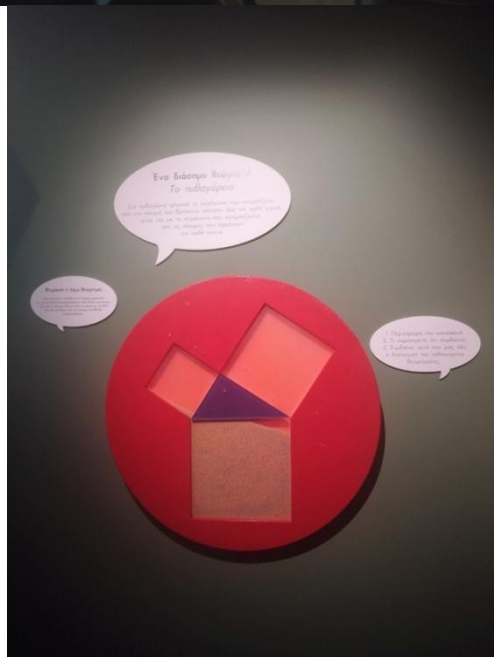
Επομένως, η ιστορία των μαθηματικών δεν είναι απλώς η ιστορία αριθμών και θεωρημάτων. Είναι η ιστορία της ανθρώπινης προσπάθειας να κατανοήσει το σύμπαν. Και όπως αποδεικνύει η εξέλιξη από τον Θαλή και τον Πυθαγόρα μέχρι τον Γαλιλαίο και το GPS, οι ιδέες που γεννήθηκαν πριν από χιλιάδες χρόνια εξακολουθούν να διαμορφώνουν τον κόσμο στον οποίο ζούμε σήμερα.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΚΕΥΕΙΣ ΣΤΑ ΠΛΑΙΣΙΑ ΤΟΥ ΠΟΛΙΤΙΣΤΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ

1. Διδακτική Επίσκεψη την Πέμπτη 05/02/2026 στην Έκθεση Μαθηματικών:
«Υπάρχει σε όλα λύση; Ταξίδι στον Κόσμο των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών» του
Κέντρου Πολιτισμού Ελληνικός Κόσμος, <https://www.hellenic-cosmos.gr/math>

ΦΩΤΟΓΡΑΦΙΕΣ





**2. Εκπαιδευτική Μετακίνηση στην Ιταλία 11/02/2026-14/02/2026:
Ρώμη – Σιένα - Πίζα – Λούκα - Σαν Τζιμινιάνο - Φλωρεντία**

ΟΜΑΔΙΚΗ ΦΩΤΟΓΡΑΦΙΑ ΣΤΗ ΣΙΕΝΑ



ΠΙΖΑ



ΦΛΩΡΕΝΤΙΑ



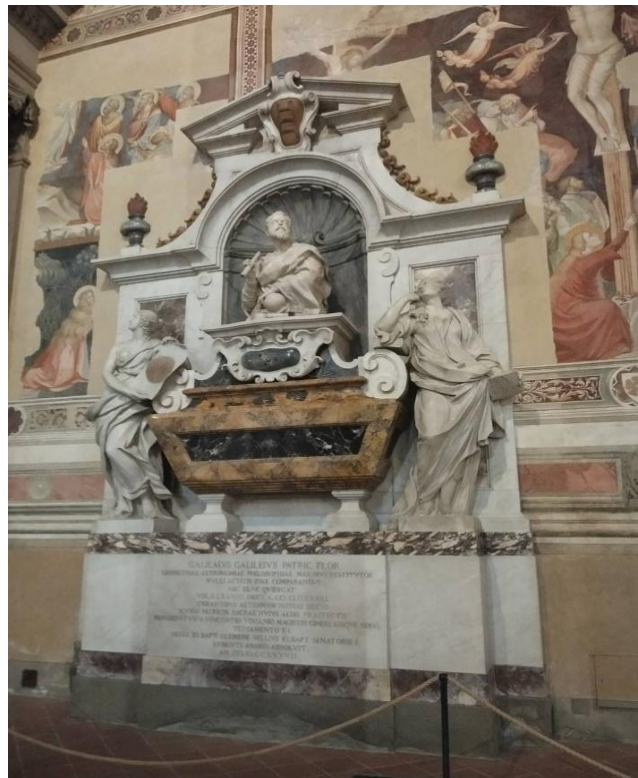
ΟΜΑΔΙΚΗ ΦΩΤΟΓΡΑΦΙΑ ΣΤΗ ΦΛΩΡΕΝΤΙΑ



ΕΠΙΣΚΕΨΗ ΣΤΗ BASILICA DI SANTA CROCE



Ο ΤΑΦΟΣ ΤΟΥ ΓΑΛΙΛΑΙΟΥ ΣΤΗ BASILICA DI SANTA CROCE



Ο ΤΑΦΟΣ ΤΟΥ ΜΑΚΙΑΒΕΛΙ ΣΤΗ BASILICA DI SANTA CROCE



ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΠΙΣΚΕΥΗ ΣΤΗΝ ΠΙΝΑΚΟΘΗΚΗ UFFIZI



ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΠΙΣΚΕΥΗ ΣΤΟ ΜΟΥΣΕΙΟ GALILEO





3. Διδακτική Επίσκεψη την Τρίτη 17/03/2026 στην Έκθεση Φιλοσοφίας:
“Δημοκρατία και Ευδαιμονία” του ΑiTHERION ,
<https://aitherion.gr/exhibitions/dimokratia-kai-ef-zin/>

